

Контрольная работа по математическим методам (МАИ)

Задание 1.

Пусть в производстве товаров участвуют три отрасли, $i = 1, 2, 3$, x_i - объемы производимой продукции каждой отрасли. Конечный спрос на продукцию i -ой отрасли равен f_i условным единицам. Коэффициенты прямых затрат a_{ij} равны объему продукции i -ой отрасли, необходимой для производства единицы продукции j -ой отрасли. Значения коэффициентов прямых затрат a_{ij} и конечный спрос f_i на продукцию каждой отрасли приведены в таблице.

Так как $n = 7$ при делении на 4 дает остаток 3, исходные данные приведены в таблице 3.

A			F
0.8	0.1	0.1	0
0.2	0.2	0.2	2
0.5	0.1	0.4	7

$$L = 50 + N; M = n + 10$$

Требуется:

- 1) определить, в каком объеме нужно выпускать продукцию для удовлетворения спроса, решив систему линейных уравнений $(E - A)X = F$ методом Гаусса.
- 2) исследовать, как изменится выпуск продукции, решая уравнение как матричное $X = (E - A)^{-1}F$, если спрос на продукцию второй отрасли увеличится на $L\%$

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru
 Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу
https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=maimm
 ©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

- 3) исследовать, как изменится выпуск продукции, решая уравнение как матричное $X = (E - A)^{-1}F$, если спрос на продукцию второй отрасли уменьшится на $M\%$

Решение.

Согласно данным варианта, $n = 7, N = 53$, тогда $L = 103, M = 17$

Запишем модель межотраслевого баланса Леонтьева: $X = AX + F$ или

$$(E - A)X = F.$$

$$(E - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.1 & -0.1 \\ -0.2 & 0.8 & -0.2 \\ -0.5 & -0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Решим систему $(E - A)X = F$ методом Гаусса. Приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду методом элементарных преобразований.

$$\begin{aligned} (E - A|F) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0.2 & -0.1 & -0.1 & 0 \\ -0.2 & 0.8 & -0.2 & 2 \\ -0.5 & -0.1 & 0.6 & 7 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0.2 & -0.1 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0.07 & -0.03 & 0.2 \\ 0 & 0.07 & -0.07 & -1.4 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0.2 & -0.1 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0.07 & -0.03 & 0.2 \\ 0 & 0 & -0.04 & -1.6 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Определим ранги матриц:

$$rg(E - A) = rg(E - A|F) = 3$$

Следовательно, по теореме Кронекера-Капелли, система совместна и имеет единственное решение.

Выпишем третье уравнение, найдем x_3

$$-0.04x_3 = -1.6$$

$$x_3 = 40$$

Выпишем второе уравнение, подставим $x_3 = 30$ и найдем x_2

$$0.07x_2 - 0.03x_3 = 0.2$$

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru
Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу
https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=maimm
©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$0.07x_2 = 0.2 + 0.03 \cdot 40 = 1.4$$

$$x_2 = 20$$

Выпишем первое уравнение, подставим $x_2 = 20$, $x_3 = 40$ и найдем x_1

$$0.2x_1 - 0.1x_2 - 0.1x_3 = 0$$

$$0.2x_1 = 0.1 \cdot 20 + 0.1 \cdot 40 = 6$$

$$x_1 = 30$$

Получили решение:

$$X = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Найдем матричный мультипликатор Леонтьева: $(E - A)^{-1}$:

$$(E - A) = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.1 & -0.1 \\ -0.2 & 0.8 & -0.2 \\ -0.5 & -0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 14.4286 & 2.5 & 3.5714 \\ 7.8571 & 2.5 & 2.1429 \\ 15 & 2.5 & 5 \end{pmatrix}$$

Исследуем, как изменится выпуск продукции, если спрос на продукцию второй отрасли увеличится на $L = 102\%$:

$$f_2 = 2 + 1.03 \cdot 2 = 4.06$$

Вектор конечного спроса будет иметь вид:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4.06 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Найдем объемы выпускаемой продукции:

$$X_1 = (E - A)^{-1}F_1$$

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru
 Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу
https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=maimm
 ©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$X_1 = \begin{pmatrix} 14.4286 & 2.5 & 3.5714 \\ 7.8571 & 2.5 & 2.1429 \\ 15 & 2.5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4.06 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35.15 \\ 25.15 \\ 45.15 \end{pmatrix}$$

Увеличение спроса на продукцию по второй отрасли на **102%** повлекло за собой увеличение объема выпуска продукции первой отрасли на $\frac{35.15-30}{30} \cdot 100\% \approx 17.17\%$ и третьей отрасли на $\frac{45.15-40}{40} \cdot 100\% = 12.88\%$

Исследуем, как изменится выпуск продукции, если спрос на продукцию второй отрасли уменьшится на $M = 17\%$

$$f_2 = 0.83 \cdot 13 = 1.66$$

Вектор конечного спроса будет иметь вид:

$$F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.66 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Найдем объемы выпускаемой продукции:

$$X_2 = (E - A)^{-1} F_2$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 14.4286 & 2.5 & 3.5714 \\ 7.8571 & 2.5 & 2.1429 \\ 15 & 2.5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1.66 \\ 7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 29.15 \\ 19.15 \\ 39.15 \end{pmatrix}$$

2	2
9,1500	,83%
1	4
9,1500	,25%
3	2
9,1500	,12%

Уменьшение спроса на продукцию по второй отрасли на **17%** повлекло за собой уменьшение объема выпуска продукции первой отрасли на $\frac{30-29.15}{30} \cdot 100\% \approx 2.83\%$ и третьей отрасли на $\frac{40-39.15}{40} \cdot 100\% \approx 2.12\%$.

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru
Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу
https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=maimm
©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Ответ. Для удовлетворения спроса продукцию нужно выпускать в
объеме: $X = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}$.

Увеличение спроса на продукцию по второй отрасли на **102%**
повлекло за собой увеличение объема выпуска продукции первой отрасли на
 $\frac{35.15-30}{30} \cdot 100\% \approx 17.17\%$ и третьей отрасли на $\frac{45.15-40}{40} \cdot 100\% = 12.88\%$

Уменьшение спроса на продукцию по второй отрасли на **17%** повлекло
за собой уменьшение объема выпуска продукции первой отрасли на
 $\frac{30-29.15}{30} \cdot 100\% \approx 2.83\%$ и третьей отрасли на $\frac{40-39.15}{40} \cdot 100\% \approx 2.12\%$.

Задание 2.

Найти объем продукции, произведенной за период $[0; T]$, если функция
Кобба-Дугласа имеет вид:

$$f(t) = (\alpha + \beta t)e^{\gamma t}$$

$$\beta = n; \alpha = \beta N; T = N; \gamma = \frac{T}{2}$$

Решение.

Согласно данным варианта, $n = 7, N = 53$, тогда

$$\beta = 7; \alpha = 371; T = 53; \gamma = 26.5$$

$$f(t) = (371 + 7t)e^{26.5t}$$

Составим определенный интеграл

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru
 Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу
https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=maimm
 ©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$q = \int_0^{53} (371 + 7t)e^{26.5t} dt$$

который при заданной функции Кобба-Дугласа описывает объем
 продукции, выпущенной за период $[0; T] = [0; 53]$

Для вычисления интеграла воспользуемся методом интегрирования по
 частям:

$$\begin{aligned} q &= \int_0^{53} (371 + 7t)e^{26.5t} dt \\ &= \left| \begin{array}{l} u = 371 + 7t \\ du = (371 + 7t)' dt = 7 dt \end{array} \quad v = \int e^{26.5t} dt = \frac{1}{26.5} e^{26.5t} \right| = \\ &= \frac{1}{26.5} e^{26.5t} (371 + 7t) \Big|_0^{53} - \int_0^{53} \frac{7}{26.5} e^{26.5t} dt \\ &= \frac{1}{26.5} e^{26.5t} (371 + 7t) \Big|_0^{53} - \frac{7}{26.5^2} e^{26.5t} \Big|_0^{53} = \\ &= \frac{1}{26.5} e^{26.5t} \left(371 + 7t - \frac{7}{26.5} \right) \Big|_0^{53} \\ &= \frac{1}{26.5} e^{26.5 \cdot 53} \left(742 - \frac{7}{26.5} \right) - \frac{1}{26.5} e^0 \left(371 - \frac{7}{26.5} \right) = \\ &= \frac{78624}{2809} e^{1404.5} - \frac{39298}{2809} \approx 27.9900 e^{1404.5} - 13.9900 \approx 2.5918 \cdot 10^{611} \end{aligned}$$

Ответ. $q \approx 27.9900 e^{1404.5} - 13.9900 \approx 2.5918 \cdot 10^{611}$

Задание 3.

Фирма имеет два филиала, затраты на производство в которых описывается функциями

$$C_1(x) = 0.01nx^2 - nx + 100N$$

$$C_2(y) = 0.01Ny^2 + Ny + 100n$$

соответственно, где x, y - объемы производимой продукции. Прибыль фирмы задается функцией $Q(x, y) = p(x + y) - [C_1(x) + C_2(y)]$, а общий спрос на товар фирмы характеризуется ценой p за единицу продукции, которая зависит от объема выпускаемой продукции $z = x + y$ и определяется функцией $z = 100(N + n) - np$.

Требуется найти:

- 1) распределение производимой продукции по филиалам;
- 2) оптимальную цену p за единицу продукции;
- 3) оптимальный общий объем продукции.

Решение.

Согласно данным варианта, $n = 7, N = 52$, тогда

$$C_1(x) = 0.07x^2 - 7x + 5300$$

$$C_2(y) = 0.53y^2 + 53y + 700$$

$$z = 6000 - 7p$$

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} z = x + y \\ z = 6000 - 7p \end{cases}$$

и найдем цену товара как функцию от объемов выпускаемой продукции:

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru
 Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу
https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=maimm
 ©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$x + y = 6000 - 7p$$

$$p = \frac{6000}{7} - \frac{1}{7}(x + y)$$

Подставим это выражение в функцию прибыли:

$$Q(x, y) = p(x + y) - [C_1(x) + C_2(y)]$$

$$Q(x, y) = \left(\frac{6000}{7} - \frac{1}{7}(x + y) \right) (x + y) - [0.07x^2 - 7x + 5300 + 0.53y^2 + 53y + 700]$$

$$Q(x, y) = -\frac{149}{700}x^2 - \frac{471}{700}y^2 - \frac{2}{7}xy + \frac{6049}{7}x + \frac{5629}{7}y - 6000$$

.Найдем экстремум функции $Q(x, y)$. Для этого вычислим частные производные первого порядка функции $Q(x, y)$:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{149}{350}x - \frac{2}{7}y + \frac{6049}{7}; \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{2}{7}x - \frac{471}{350}y + \frac{5629}{7}$$

Приравняем частные производные к нулю и найдем критические точки:

$$\begin{cases} -\frac{149}{350}x - \frac{2}{7}y + \frac{6049}{7} = 0 \\ -\frac{2}{7}x - \frac{471}{350}y + \frac{5629}{7} = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 \approx 1899.4824, y_0 \approx 194.2713$$

Вычислим частные производные второго порядка

$$A = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = -\frac{149}{350}; \quad B = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = -\frac{2}{7}; \quad C = \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = -\frac{471}{350}$$

$$\Delta = AC - B^2 = -\frac{149}{350} \left(-\frac{471}{350} \right) - \left(-\frac{2}{7} \right)^2 = \frac{70179}{122500} - \frac{4}{49} = \frac{8597}{17500} > 0$$

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru
Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу
https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=maimm
©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Так как $\Delta > 0$, то точка $(x_0, y_0) \approx (1899.4824; 194.2713)$ - экстремум.

Так как $A = -\frac{149}{350} < 0$, то точка $(x_0, y_0) \approx (1899.4824; 194.2713)$ - точка максимума.

Итак, наибольшая прибыль будет получена, если первый филиал будет производить **1899.4824** единиц продукции, второй филиал будет производить **194.2713** единиц продукции.

Найдем оптимальную цену p :

$$p = \frac{6000 - (x + y)}{7} = \frac{1}{7}(6000 - (1899.4824 + 194.2713)) = 558.0352$$

Оптимальный общий объем продукции:

$$x + y = 1899.4824 + 194.2713 = 2093.7536$$

Ответ.

Наибольшая прибыль будет получена, если первый филиал будет производить **1899.4824** единиц продукции, второй филиал будет производить **194.2713** единиц продукции. Оптимальная цена при этом составит $p = 558.0352$ ден.ед., оптимальный общий объем продукции: **2093.7536** единицы.

Задание 6.

Известно, что средняя урожайность пшеницы в мире равна 22,5 ц/га. На Земле есть территории с урожайностью как меньшей 10 ц/га, так и превышающей 70 ц/га.

Плотность распределения урожайности по засеянной площади в некотором районе Российской Федерации в 2009 году задается эмпирической

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru
Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу
https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=maimm
©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

формулой $\rho = 16 + ax + by$ (центнеров на гектар), а засеянная зерновыми территория имеет форму прямоугольника, в котором $0 \leq x \leq c$ км, $0 \leq y \leq d$ км.

Требуется найти:

- 1) урожай пшеницы, собранный в этом районе РФ в 2009 году;
- 2) среднюю урожайность пшеницы в районе;
- 3) процентные доли средней урожайности района относительно каждой средней урожайности, приведенной в условиях задания.

$$a = 0.01n, \quad b := 0.01(n + N), \quad c = n, \quad d = n + N$$

Решение.

Согласно данным варианта, $n = 7, N = 53$, тогда

$$a = 0.07, \quad b := 0.6, \quad c = 7, \quad d = 60$$

$$\rho = 16 + 0.07x + 0.6y$$

$$0 \leq x \leq 7 \text{ км}, \quad 0 \leq y \leq 60 \text{ км}$$

1 гектар - это площадь квадрата со стороной 100м. В качестве единицы длины возьмем 100м. Приведем к этой единице длины линейные размеры засеянной площади:

$$0 \leq x \leq 70 \text{ (ед.длины)}, \quad 0 \leq y \leq 600 \text{ (ед.длины)}$$

Величина собранного урожая равна:

$$\begin{aligned} q &= \iint_D \rho(x, y) dx dy = \int_0^{70} \int_0^{600} (16 + 0.07x + 0.6y) dx dy = \\ &= \int_0^{70} \left(\int_0^{600} (16 + 0.07x + 0.6y) dy \right) dx \end{aligned}$$

Вычислим внутренний интеграл:

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru
Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу
https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=maimm
©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$\int_0^{590} (16 + 0.07x + 0.6y) dy = (16y + 0.07xy + 0.3y^2) \Big|_0^{600} \\ = 9600 + 42x + 108000 = \\ = 117600 + 42x$$

Вычислим внешний интеграл:

$$q = \int_0^{70} (117600 + 42x) dx = (117600x + 21x^2) \Big|_0^{70} = 8232000 + 101185 \\ = 8334900 \text{ (ц.)}$$

1 тонна - 10 центнеров. Урожай в тоннах составит **833490** тонн.

Площадь посева составляет $70 \cdot 600 = 42000$ га. Средняя урожайность

пшеницы в районе:

$$\frac{8334900}{42000} = 198.45 \text{ ц/га}$$

Определим процентные доли средней урожайности района относительно каждой средней урожайности, приведенной в условиях задания.

Относительно среднемировой урожайности **22.5 ц/га**:

$$n\%_1 = \frac{198.45}{22.5} \cdot 100\% \approx 882\%$$

Относительно урожайности **10 ц/га**:

$$n\%_2 = \frac{198.45}{10} \cdot 100\% = 1984.5\%$$

Относительно урожайности **70 ц/га**:

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru
Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу
https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=maimm
©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$n\%_3 = \frac{198.45}{70} \cdot 100\% = 283.5\%$$

Ответ.

Урожай в тоннах составит **833490** тонн. Средняя урожайность пшеницы в районе **198.45 ц/га**, что составляет **882%** относительно среднемировой урожайности **22.5 ц/га**, **1984.5%** относительно урожайности **10 ц/га**, **283.5** относительно урожайности **70 ц/га**.