Решение задач из сборника Чудесенко
Теория вероятностей
Задачи 1-20. Вариант 6

Задача 1. Бросаются две игральные кости. Определить вероятность того, что: а) сумма числа очков не превосходит N; б) произведение числа очков не превосходи N; в) произведение числа очков делится на N.
N=8

Решение. Введем событие $A=$ (Сумма числа очков на обеих костях не превосходит $N=8$).

Найдем вероятность события A по классическому определению вероятности: $P=\frac{m}{n}$, где m – число исходов, благоприятствующих осуществлению события A, а n – число всех элементарных равновозможных исходов. Составим таблицу всех возможных комбинаций очков при броске двух костей и соответствующих сумм:

1-ая кость / 2-ая кость	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Получаем: $n=36$ - всего различных комбинаций при броске костей (на первой кости выпадает одно из шести чисел и на второй кости выпадает одно из шести чисел). $m=26$ - количество комбинаций, в которых сумма не более 8 (см. выделенные красным числа в таблице). Таким образом, искомая вероятность $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{26}{36}=\frac{13}{18}$.

Введем событие B = (Произведение очков на обеих костях не превосходит $N=8$). Найдем вероятность события B по классическому определению вероятности: $P=\frac{m}{n}$, где m – число исходов, благоприятствующих осуществлению события, а n – число всех элементарных равновозможных исходов. Составим таблицу всех возможных комбинаций очков при броске двух костей и соответствующих произведений:

1-ая кость / 2-ая кость	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Получаем: $n=36$ - всего различных комбинаций при броске костей (на первой кости выпадает одно из шести чисел и на второй кости выпадает одно из шести чисел). $m=17$ -

количество комбинаций, в которых произведение очков не более 8 (см. выделенные красным числа в таблице). Таким образом, искомая вероятность $P(B)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{17}{36}$.

Введем событие C = (Произведение числа очков на обеих костях делится на $N=8$). Найдем вероятность события C по классическому определению вероятности: $P=\dfrac{m}{n}$, где m – число исходов, благоприятствующих осуществлению события, а n – число всех элементарных равновозможных исходов. Составим таблицу всех возможных комбинаций очков при броске двух костей и соответствующих произведений:

1-ая кость / 2-ая кость	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Получаем: $n=36$ - всего различных комбинаций при броске костей (на первой кости выпадает одно из шести чисел и на второй кости выпадает одно из шести чисел). $m=5$ - количество комбинаций, в которых произведение очков делится на 8 (см. выделенные красным числа в таблице). Таким образом, искомая вероятность $P(C)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{5}{36}$.

Ответ: 13/18; 17/36; 5/36.

Задача 2. Имеются изделия четырех сортов, причем число изделий i-сорта равно n_i, $i=1,2,3,4$. Для контроля наудачу берутся m изделий. Определить вероятность того, что среди них m_1 первосортных, m_2, m_3 и m_4 второго, третьего и четвертого сорта соответственно $\sum_{i=1}^{4} m_i = m$.

n_1=3; n_2=2; $n_3=3$; $n_4=2$; m_1=2; $m_2=1$; $m_3=3$; $m_4=1$

Решение. Используем классическое определение вероятности: $P=\dfrac{M}{N}$, где M – число исходов, благоприятствующих осуществлению события, а N – число всех возможных исходов.

Всего изделий $n=3+2+3+2=10$, выбирают $m=2+1+3+1=7$ изделий.

$N=C_{10}^{7}=\dfrac{10!}{7!3!}=\dfrac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}=120$ - число различных способов извлечь 7 изделий из 10 имеющихся.

$M = C_3^2 \cdot C_2^1 \cdot C_3^3 \cdot C_2^1 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 12$ - число способов извлечь 2 изделия 1 сорта (из 3), 1 изделие второго сорта (из 2), 3 изделия третьего сорта (из 3) и 1 изделие четвертого сорта (из 2).

Тогда искомая вероятность:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{12}{120} = 0{,}1$$

Ответ: 0,1.

Задача 3. Среди n лотерейных билетов k выигрышных. Наудачу взяли m билетов. Определить вероятность того, что среди них l выигрышных.
n=11; l=3; m=4; k=8

Решение. Используем классическое определение вероятности: $P = \frac{m}{n}$, где m – число исходов, благоприятствующих осуществлению события, а n – число всех возможных исходов.

$n = C_{11}^4 = \frac{11!}{7!4!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 330$ - число различных способов выбрать 4 билета из 11.

$m = C_8^3 \cdot C_3^1 = \frac{8!}{3!5!} \cdot 3 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3 = 168$ - число способов выбрать 3 выигрышных билета (из 8 выигрышных) и еще 1 невыигрышный (из 11-8=3).

Тогда искомая вероятность:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{168}{330} = \frac{28}{55} \approx 0{,}509.$$

Ответ: 0,509.

Задача 4. В лифт k-этажного дома сели n пассажиров ($n < k$). Каждый независимо от других с одинаковой вероятностью может выйти на любом (начиная со второго) этаже. Определить вероятность того, что а) все вышли на разных этажах; б) по крайней мере, двое сошли на одном этаже.
k=11; n=4

Решение. Введем событие X = (Все 4 пассажира вышли на разных этажах) и противоположное ему $\overline{X}$ = (По крайней мере, двое сошли на одном этаже).

Найдем вероятность события X. Используем классическое определение вероятности: $P = \frac{m}{n}$, где m – число исходов, благоприятствующих осуществлению события, а n – число всех равновозможных элементарных исходов.

$n = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$ - количество различных способов выхода из лифта для трех человек, так как каждый из них может выйти на любом из десяти этажей (со второго по одиннадцатый включительно).
$m = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$, так как первый пассажир может выйти на любом из 10 этажей, тогда второй – на любом из оставшихся 9 этажей, третий – на любом из оставшихся 8, четвертый – на любом из оставшихся 7, тогда все они выйдут на разных этажах. Вероятность $P(X) = \frac{m}{n} = \frac{5040}{10000} = 0,504.$
Тогда вероятность события $\overline{X}$ равна $P(\overline{X}) = 1 - P(X) = 1 - 0,504 = 0,496.$

Ответ: а) 0,504; б) 0,496.

Задача 5. В отрезке единичной длины наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что расстояние от точки до концов отрезка превосходит величину $1/k$.
k=7

Решение. Используем геометрическое определение вероятности. Построим схематично отрезок и изобразим точки, отстоящие от концов отрезка на расстояние 1/7:

Отрезок в центре (между точками 1/7 и 6/7) характеризуется тем, что любая точка внутри этого отрезка отстоит от концов единичного отрезка на расстояние не меньшее 1/7. Таким образом, вероятность искомого события равна отношению длины данного отрезка (5/7) к длине всего единичного отрезка, на котором появляется точка:
$P = \frac{5/7}{1} \approx 0,714$.

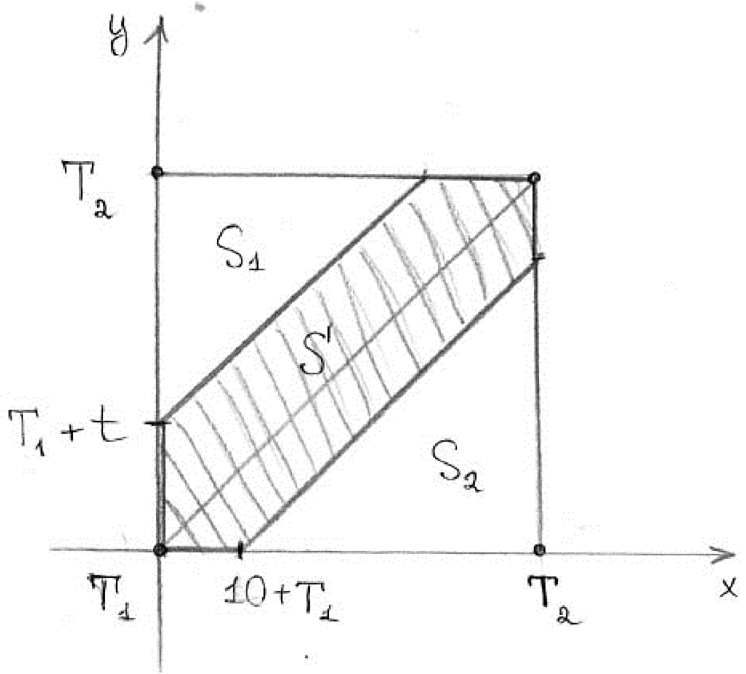
Ответ: 0,714.

Задача 6. Моменты начала двух событий наудачу распределены в промежутке времени от T_1 до T_2. Одно из событий длится 10 мин., другое – t мин. Определить вероятность того, что: а) события «перекрываются» по времени; б) «не перекрываются».
T_1=1100; T_2=1300; t=15

Решение. Используем для решения задачи геометрическое определение вероятности.

Обозначим моменты начала первого и второго события за x и y. Так как события поступают в промежуток T_1 до T_2, то справедливы следующие условия: $T_1 \le x, y \le T_2$. Рассмотрим прямоугольную систему координат xOy. В этой системе координат всем возможным значениям времени начала событий соответствуют точки квадрата со стороной $T_2 - T_1 = 1300 - 1100 = 200$ (см. рисунок).

Закрашенная область S соответствует тем моментам начала событий, при которых они «перекрываются», так как между началами событий проходит не больше времени, чем длится событие (самое первое).



Тогда по геометрическому определению вероятности вероятность события A =(События «перекрываются» во времени) равна отношению площади заштрихованной фигуры к площади всего квадрата. Площадь фигуры вычислим как площадь квадрата минус площади двух равнобедренных прямоугольных треугольника:

$$P(A) = \frac{200^2 - \frac{1}{2}(200-10)^2 - \frac{1}{2}(200-15)^2}{200^2} = \frac{9675}{2 \cdot 40000} \approx 0{,}121.$$

Вероятность противоположного события $\overline{A}$ =(События не «перекрываются» во времени) равна $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}121 = 0{,}879$.

Ответ: 0,121; 0,879.

Задача 7. В круге радиуса R наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что она попадает в одну из двух непересекающихся фигур, площади которых равны S_1 и S_2.
R=12; S_1=2,39; S_2=5,57

Решение. Используем геометрическое определение вероятности. Считаем, что обе фигуры целиком лежат в круге. Тогда вероятность того, что точка попадает в одну из двух непересекающихся фигур равна отношению сумме площадей данных фигур к площади всего круга, где точка появляется:

$$P = \frac{S_1 + S_2}{\pi R^2} = \frac{2,39 + 5,57}{144\pi} \approx 0,018.$$

Ответ: 0,018.

Задача 8. В двух партиях k_1 и k_2 % доброкачественных изделий соответственно. Наудачу выбирают по одному изделию из каждой партии. Какова вероятность обнаружить среди них: а) хотя бы одно бракованное; б) два бракованных; в) одно доброкачественное и одно бракованное?

k_1=86; k_2=32

Решение. Введем вспомогательные независимые события:

A_1 =(Вероятность того, что из первой партии достали доброкачественное изделие),

A_2 =(Вероятность того, что из второй партии достали доброкачественное изделие),

вероятности даны в условии задачи: $P(A_1) = 86\% = 0,86$, $P(A_2) = 32\% = 0,32$.

Введем событие X = (Среди изделий есть хотя бы одно бракованное) и противоположное ему событие $\overline{X}$ = (Среди изделий нет ни одного бракованного, оба доброкачественные). Таким образом, $\overline{X} = A_1 \cdot A_2$, вероятность

$P(\overline{X}) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,86 \cdot 0,32 = 0,2752$

Тогда вероятность события X равна $P(X) = 1 - P(\overline{X}) = 1 - 0,2752 = 0,7248$.

Введем событие Y = (Оба изделия бракованные). $Y = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2}$, вероятность $P(Y) = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) = (1 - 0,86)(1 - 0,32) = 0,0952$.

Введем событие Z = (Среди двух изделий одно бракованное и одно доброкачественное). Можно воспользоваться связью между событиями:

$P(Z) + P(Y) = P(X)$, откуда $P(Z) = P(X) - P(Y) = 0,7248 - 0,0952 = 0,6296$.

Ответ: а) 0,7248; б) 0,0952; в) 0,6296.

Задача 9. Вероятность того, что цель поражена при одном выстреле первым стрелком - p_1, вторым - p_2. Первый сделал n_1, второй - n_2 выстрелов. Определить вероятность того, что цель не поражена.

p_1=0,66; p_2=0,49; n_1=3; n_2=2

Решение. Сначала найдем вероятности промаха для каждого стрелка:
$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0,66 = 0,34$,
$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0,49 = 0,51$.

Чтобы цель не была поражена, первый стрелок должен промахнуться все 3 раза (вероятность $0,34^3$), второй стрелок должен промахнуться два раза (вероятность $0,51^2$), так как выстрелы стрелков независимы, искомая вероятность, что цель не будет поражена, равна: $P = 0,34^3 \cdot 0,51^2 \approx 0,01$.

Ответ. 0,01.

Задача 10. Два игрока А и В поочередно бросают монету. Выигравшим считается тот, у кого раньше выпадет герб. Первый бросок делает игрок А, второй – В, третий – А и т.д.
1. Найти вероятность того, что А выиграл до k броска.
2. Каковы вероятности выигрыша для каждого игрока при сколь угодно длительной игре?
k=9.

Решение. Вероятность выпадения герба и решки одинаковы, $p = q = 0,5$.
Вероятность того, что А выиграет на первом броске равна 0,5 (при первом броске у А выпадет герб).
Вероятность того, что А выиграет на втором броске равна $0,5^3$ (при первом броске у А выпадет решка – 0,5, при первом броске у В выпадет решка – 0,5, при втором броске у А выпадет герб – 0,5).
Аналогично, вероятность того, что А выиграет на k броске равна $0,5^{2k-1}$.

Тогда вероятность того, что А выиграет до 9 броска равна сумме вероятностей того, что А выиграет на 1 броске, на 2 броске, …, на 8 броске.

Получаем:
$$P = \sum_{k=1}^{8} 0,5^{2k-1} = 0,5 + 0,5^3 + 0,5^5 + ... + 0,5^{15} \approx 0,6667.$$

Чтобы найти вероятность выигрыша игрока А при сколь угодно долгой игре, нужно положить $k \to \infty$. По формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии ($\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$) получаем:

$$P_1 = \sum_{k=1}^{\infty} 0,5^{2k-1} = 2\sum_{k=1}^{\infty} 0,5^{2k} = 2\sum_{k=1}^{\infty} (1/4)^k = 2 \cdot \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} (1/4)^k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-1/4} = \frac{2}{3}$$ - вероятность победы игрока А, тогда вероятность победы игрока В равна $1 - 2/3 = 1/3$.

Ответ: 0,6667; 2/3; 1/3.

Задача 11. Урна содержит M занумерованных шаров с номерами от 1 до M. Шары извлекаются по одному без возвращения. Рассматриваются следующие события:
A – номера шаров в порядке поступления образуют последовательность 1, 2, …, M;
B – хотя бы один раз совпадает номер шара и порядковый номер извлечения;
C – нет ни одного совпадения номера шара и порядкового номера извлечения.
Определить вероятности событии A, B, C. Найти предельные значения вероятностей при $M \to \infty$.
M=10

Решение. Используем классическое определение вероятности: $P = \frac{m}{n}$, где m – число исходов, благоприятствующих осуществлению события, а n – число всех возможных исходов.
$n = M! = 10!$ - число различных последовательностей извлечения шаров.

$m(A) = 1$ - только одна последовательность соответствует извлечению в порядке 1, 2, …, M, поэтому $P(A) = \frac{1}{10!} \approx 0,28 \cdot 10^{-6}$.

$m(B) = \sum_{i=1}^{M} (-1)^{i+1} C_M^i (M-i)! = \sum_{i=1}^{10} (-1)^{i+1} C_{10}^i (10-i)! = 2293839$ - число различных последовательностей извлечения шаров, имеющих хотя бы одну неподвижную точку (то есть имеющих хотя бы одно совпадение номера шара и номера извлечения).
Вероятность $P(B) = \frac{2293839}{10!} \approx 0,632$.

Событие C противоположно событию B, поэтому вероятность
$P(C) = 1 - P(B) = 1 - 0,632 = 0,368$.

Найдем предельные значения вероятностей при $M \to \infty$.

$$\lim_{M \to \infty} P(A) = \lim_{M \to \infty} \frac{1}{M!} = 0,$$

$$\lim_{M \to \infty} P(B) = \lim_{M \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{M} (-1)^{i+1} C_M^i (M-i)!}{M!} = \lim_{M \to \infty} \sum_{i=1}^{M} \frac{(-1)^{i+1}}{i!} = 1 - 1/e \approx 0,632,$$

$$\lim_{M \to \infty} P(C) = 1 - \lim_{M \to \infty} P(B) = 1/e \approx 0,368.$$

Задача 12. Из 1000 ламп n_i принадлежат $i-$й партии, $i=1,2,3$, $\sum_{i=1}^{3} n_i = 1000$. В первой партии 6%, во второй 5%, в третьей 4% бракованных ламп. Наудачу выбирается одна лампа. Определить вероятность того, что выбранная лампа – бракованная.
n_1=700; n_2=90

Решение. Введем полную группу независимых гипотез:
Hi = (Лампа принадлежат i-ой партии), $i=1,2,3$.
Найдем вероятности гипотез по классическому определению вероятностей. Всего ламп 1000, из них 1-ой партии принадлежат 700, то есть $P(H1)=\frac{700}{1000}=0,7$, 2-ой партии принадлежат 90, то есть $P(H2)=\frac{90}{1000}=0,09$, остальные 1000-700-90=210 ламп принадлежат 3-ей партии, поэтому $P(H3)=\frac{210}{1000}=0,21$.

Введем событие A = (Лампа бракованная). По условию даны априорные вероятности:
$P(A|H1)=0,06$, $P(A|H2)=0,05$, $P(A|H3)=0,04$.

Вероятность события A найдем по формуле полной вероятности:
$$P(A)=P(A|H1)P(H1)+P(A|H2)P(H2)+P(A|H3)P(H3)=$$
$$=0,7\cdot 0,06+0,09\cdot 0,05+0,21\cdot 0,04=0,0549.$$

Ответ: 0,0549.

Задача 13. В первой урне N_1 белых и M_1 черных шаров, во второй N_2 белых и M_2 черных. Из первой во вторую переложено К шаров, затем из второй урны извлечен один шар. Определить вероятность того, что выбранный из второй урны шар – белый.
N_1=3; M_1=2; N_2=4; M_2=4; К=2

Решение. Введем полную группу гипотез:
$H1$ = (Из первой урны во вторую переложили 2 белых и 0 черных шаров),
$H2$ = (Из первой урны во вторую переложили 1 белый и 1 черный шар),
$H3$ = (Из первой урны во вторую переложили 0 белых и 2 черных шара).

Найдем вероятности гипотез по классическому определению вероятности:
$$P(H1)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}=0,3,\ P(H2)=\frac{C_3^1\cdot C_2^1}{C_5^2}=\frac{6}{10}=0,6,\ P(H3)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}=0,1.$$

После перекладывания шаров во второй урне станет (при выполнении соответствующей гипотезы):
$H1$ - 6 белых и 4 черных шаров.
$H2$ - 5 белых и 5 черных шаров.

$H3$ - 4 белых и 6 черных шаров.

Введем событие A = (Из второй урны выбран белый шар). Найдем условные вероятности по классическому определению вероятности:

$$P(A|H1)=\frac{6}{6+4}=0,6,\ P(A|H2)=\frac{5}{5+5}=0,5,\ P(A|H3)=\frac{4}{6+4}=0,4.$$

Найдем вероятность события A по формуле полной вероятности:

$$P(A)=\sum P(A|Hi)P(Hi)=0,3\cdot 0,6+0,6\cdot 0,5+0,1\cdot 0,4=0,52.$$

Ответ: 0,52.

Задача 14. В альбоме k чистых и l гашеных марок. Из них наудачу извлекаются m марок (среди которых могут быть и чистые, и гашеные), подвергаются спецгашению и возвращаются в альбом. После этого вновь наудачу извлекается n марок. Определить вероятность того, что все n марок чистые.
k=11; l=8; m=2; n=5

Решение. Введем полную группу гипотез:
$H1$ = (Выбрано 2 чистых марки),
$H2$ = (Выбрано 1 чистая и 1 гашеная марка),
$H3$ = (Выбрано 2 гашеные марки).

Найдем вероятности гипотез по классическому определению вероятностей:

$$P(H1)=\frac{C_{11}^2}{C_{19}^2}=\frac{55}{171},\ P(H2)=\frac{C_{11}^1\cdot C_8^1}{C_{19}^2}=\frac{88}{171},\ P(H3)=\frac{C_8^2}{C_{19}^2}=\frac{28}{171}.$$

Введем событие A = (После гашения все пять выбранных марок - чистые). Найдем априорные условные вероятности $P(A|Hi)$, $i=1,2,3$.

Гипотеза $H1$. После гашения будет 9 чистых и 10 гашеных марок,

$$P(A|H1)=\frac{C_9^5}{C_{19}^5}=\frac{126}{11628}=\frac{7}{646}\approx 0,011.$$

Гипотеза $H2$. После гашения будет 10 чистых и 9 гашеных марок,

$$P(A|H2)=\frac{C_{10}^5}{C_{19}^5}=\frac{252}{11628}=\frac{7}{323}\approx 0,022.$$

Гипотеза $H3$. После гашения будет 11 чистых и 8 гашеных марок,

$$P(A|H3)=\frac{C_{11}^5}{C_{19}^5}=\frac{462}{11628}=\frac{77}{1938}\approx 0,04.$$

Вероятность события A найдем по формуле полной вероятности:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(A\,|\,Hi)\cdot P(Hi)=\frac{55}{171}\cdot 0,011+\frac{88}{171}\cdot 0,022+\frac{28}{171}\cdot 0,04\approx 0,021..$$

Ответ: 0,021.

Задача 15. В магазин поступают однотипные изделия с трех заводов, причем i-й завод поставляет m_i % изделий (i = 1, 2, 3). Среди изделий i-го завода n_i % первосортных. Куплено одно изделие. Оно оказалось первосортным. Определить вероятность того, что купленное изделие выпущено j-м заводом.
m_1=60; $m_2=20$; $m_3=20$; n_1=70; n_2=80; $n_3=90$; j=3

Решение. Введем полную группу гипотез:
$H1$ = (Изделие выпущено 1-ым заводом),
$H2$ = (Изделие выпущено 2-ым заводом),
$H3$ = (Изделие выпущено 3-им заводом).
По условию известны вероятности гипотез $P(H1)=0,6$, $P(H2)=0,2$, $P(H3)=0,2$.

Введем событие A = (Изделие первосортное). По условию известны априорные вероятности:
$P(A\,|\,H1)=0,7$, $P(A\,|\,H2)=0,8$, $P(A\,|\,H3)=0,9$.

Вероятность того, что изделие выпущено 3-им заводом, если оно оказалось первосортным $P(H3\,|\,A)$ найдем по формуле Байеса:

$$P(H3\,|\,A)=\frac{P(A\,|\,H3)P(H3)}{P(A\,|\,H1)P(H1)+P(A\,|\,H2)P(H2)+P(A\,|\,H3)P(H3)}=$$
$$=\frac{0,2\cdot 0,9}{0,6\cdot 0,7+0,2\cdot 0,8+0,2\cdot 0,9}=\frac{0,18}{0,42+0,16+0,18}\approx 0,237.$$

Ответ: 0,237.

Задача 16. Монета бросается до тех пор, пока герб не выпадает n раз. Определить вероятность того, что цифра выпадет m раз.
n=6; m=5

Решение. Таким образом, нужно найти вероятность того, что за 10 бросков выпадет 5 гербов и 5 цифр, а потом на последнем 11-ом броске выпадет шестой герб, броски закончатся. Вероятности выпадения герба и цифры одинаковы и равны 1/2, броски монет независимы, поэтому, вероятность найдем по формуле Бернулли:

$$P = P_{10}(5)\cdot\frac{1}{2} = C_{10}^{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{252}{2^{11}} = \frac{63}{512} \approx 0{,}123.$$

Ответ. 0,123.

Задача 17. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна p. Куплено n билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.
p=0,3; n=15

Решение. Имеем схему Бернулли с параметрами $n=15$ и $p=0,3$, $q=1-p=0,7$. Наивероятнейшее число выигрышных билетов k определяется из формулы

$$np-q \le k < np+p,$$
$$15\cdot 0,3-0,7 \le k < 15\cdot 0,3+0,3,$$
$$3,8 \le k < 4,8$$

откуда $k=4$. Соответствующую вероятность найдем по формуле Бернулли $P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$, откуда получаем:

$$P_{15}(4)=C_{15}^{4}\cdot 0,3^{4}\cdot 0,7^{11}=\frac{15!}{4!11!}\cdot 0,3^{4}\cdot 0,7^{11}=\frac{12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 0,3^{4}\cdot 0,7^{11}\approx 0,219.$$

Ответ: $k=4$; 0,219.

Задача 18. На каждый лотерейный билет с вероятностью p_1 может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью p_2 - мелкий выигрыш и с вероятностью p_3 билет может оказаться без выигрыша, $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$. Куплено n билетов. Определить вероятность получения n_1 крупных выигрышей и n_2 мелких.
n=15, n_1=2; n_2=2; p_1=0,15; p_2=0,2

Решение. Имеем полиномиальную схему с тремя исходами и вероятностями:
Крупный выигрыш, $p_1=0,15$,
Мелкий выигрыш, $p_2=0,2$
Нет выигрыша, $p_3=1-0,15-0,2=0,65$.

Тогда вероятность того, что при покупке 15 билетов будет 2 с крупным выигрышем, 2 с мелким выигрышем и 11 без выигрыша, равна:

$$P_{15}(2,2,11)=\frac{15!}{2!2!11!}(0,15)^2\cdot(0,2)^2\cdot(0,65)^{11}=\frac{12\cdot13\cdot14\cdot15}{4}(0,15)^2\cdot(0,2)^2\cdot(0,65)^{11}\approx 0,065.$$

Ответ: 0,065.

Задача 19. Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна p. Поступило n вызовов. Определить вероятность m «сбоев».
m=7; n=1000; p=0,007

Решение. Имеем схему Бернулли с параметрами $n=1000$, $p=0,007$. Так как $n=1000$ достаточно велико, а вероятность $p=0,007$ мала, можно использовать для приближенного вычисления формулу Пуассона:

$P_n(k)=\frac{(np)^k}{k!}e^{-np}$ - вероятность того, что из n выстрелов будет ровно k попаданий. Обозначим $\lambda=np=1000\cdot0,007=7$, получим формулу $P_{1000}(k)=\frac{7^k}{k!}e^{-7}$.

Тогда вероятность того, что будет ровно 7 сбоев, равна

$$P_{1000}(7)=\frac{7^7}{7!}e^{-7}\approx 0,149.$$

Ответ: 0,149.

Задача 20. Вероятность наступления некоторого события в каждом из n независимых испытаний равна p. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $k_1 \le m \le k_2$.
n=100; p=0,7; k_1=65; k_2=75.

Решение. Используем интегральную теорему Муавра-Лапласа:

$P_n(k1,k2)\approx\Phi\left(\frac{k2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{k1-np}{\sqrt{npq}}\right)$. Здесь n=100, p=0,7, q= 1-p = 0,3, k1=65, k2=75, значения функции Лапласа берутся из таблицы. Подставляем:

$$P_{100}(65,75)\approx\Phi\left(\frac{75-100\cdot0,7}{\sqrt{100\cdot0,7\cdot0,3}}\right)-\Phi\left(\frac{65-100\cdot0,7}{\sqrt{100\cdot0,7\cdot0,3}}\right)=\Phi(1,09)-\Phi(-1,09)=$$

$$=2\Phi(1,09)=2\cdot0,3621=0,7242.$$

Ответ: 0,7242.