Задача 1. Найдите собственные значения и собственные векторы и векторы Фробениуса матрицы B. Если она продуктивна, найдите запас ее продуктивности.

$$B=\begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы B.

Решим характеристическое уравнение:

$$|B-\lambda E|=\begin{vmatrix} 0,4-\lambda & 0 & 0,3 \\ 0,4 & 0,2-\lambda & 0,6 \\ 0,2 & 0 & 0,5-\lambda \end{vmatrix}=(0,2-\lambda)\begin{vmatrix} 0,4-\lambda & 0,3 \\ 0,2 & 0,5-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(0,2-\lambda)\left((0,4-\lambda)(0,5-\lambda)-0,06\right)=(0,2-\lambda)\left(0,2-0,9\lambda+\lambda^2-0,06\right)=$$

$$=(0,2-\lambda)\left(0,14-0,9\lambda+\lambda^2\right)=(0,2-\lambda)^2(0,7-\lambda)=0$$

Решая уравнение, находим собственные значения $\lambda_1=0,2$ (кратности 2) и $\lambda_2=0,7$ кратности 1. Найдем соответствующие собственные векторы.

Пусть $\lambda_1=0,2$. Решаем систему для этого значения

$$\begin{cases} 0,2x+0,3z=0, \\ 0,4x+0,6z=0, \\ 0,2x+0,3z=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=C_1, \\ x=C_2, \\ z=-\dfrac{2}{3}C_2. \end{cases}$$

Собственные векторы: $X_1=C_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $X_2=C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

Пусть $\lambda_2=0,7$. Решаем систему

$$\begin{cases} -0,3x+0,3z=0, \\ 0,4x-0,5y+0,6z=0, \\ 0,2x-0,2z=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = z \\ x = 0,5y. \end{cases}$$

Собственный вектор: $X_3 = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Число фробениуса есть $\lambda_B = \lambda_2 = 0,7$, вектор Фробениуса $X_3 = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_3 > 0$.

Проверим продуктивность матрицы B. Так как ее число Фробениуса меньше 1, она продуктивна (по второму критерию продуктивности).

Запас продуктивности можно найти по формуле

$$\alpha = 1/\lambda_B - 1 = 1/0,7 - 1 = \frac{10}{7} - 1 = \frac{3}{7}.$$

Задача 2.

2. Найдите вектор конечного потребления, матрицу прямых затрат, её число и векторы Фробениуса для вектора валового продукта $\bar{x} = \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \end{pmatrix}$ и матрицы производственного потребления $X = \begin{pmatrix} 240 & 120 \\ 80 & 100 \end{pmatrix}$; запишите уравнения Леонтьева в матричном виде. Найдите вектор валового продукта, обеспечивающий конечное потребление соответственно 80 и 60 усл. ед. Рассчитайте равновесные цены, доставляющие норму добавленной стоимости на уровне 0,24 и 0,28.

Решение. Найдем вектор конечного потребления из основного балансового соотношения

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + y_i, \; i = 1,2.$$

Получаем $Y = \begin{pmatrix} 400 - (240 + 120) \\ 200 - (80 + 100) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \end{pmatrix}$.

Запишем технологическую матрицу A (матрицу прямых затрат), элементы a_{ij} которой (коэффициенты прямых затрат) имеют вид:

$a_{ij}=\dfrac{x_{ij}}{x_j}$, $\quad i, j=1,2$, где x_{ij} - часть объема валовой продукции отрасли i, потребляемая отраслью j производственного цикла ($i, j=1,2$).

Получаем:

$$a_{11}=\frac{x_{11}}{x_1}=\frac{240}{400}=0,6,\quad a_{12}=\frac{x_{12}}{x_2}=\frac{120}{200}=0,6,$$

$$a_{21}=\frac{x_{21}}{x_1}=\frac{80}{400}=0,2,\quad a_{22}=\frac{x_{22}}{x_2}=\frac{100}{200}=0,5.$$

Получили матрицу: $A=\begin{pmatrix}0,6 & 0,6\\ 0,2 & 0,5\end{pmatrix}$. Найдем число и вектор Фробениуса для этой матрицы. Решим характеристическое уравнение:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}0,6-\lambda & 0,6\\ 0,2 & 0,5-\lambda\end{vmatrix}=(0,6-\lambda)(0,5-\lambda)-0,12=(0,2-\lambda)(0,9-\lambda)=0.$$

Решая уравнение, находим собственные значения $\lambda_1=0,2$, $\lambda_2=0,9$ кратности 1.

Пусть $\lambda=0,9$. Решаем систему

$$\begin{cases}-0,3x+0,6y=0,\\ 0,2x-0,4y=0;\end{cases}\Rightarrow x=2y.$$

Собственный вектор $X_1=C_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

Получили число и вектор Фробениуса для этой матрицы: $\lambda_A=0,9$,

$X_1=C_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

Уравнения Леонтьева в матричном виде: $Y=X-AX$ или

$$\begin{pmatrix}40\\20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}400\\200\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0,6 & 0,6\\ 0,2 & 0,5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}400\\200\end{pmatrix}.$$

Найдем вектор валового продукта, обеспечивающий конечное потребление соответственно 80 и 60 усл.ед. Для этого надо найти матрицу полных затрат $S=(E-A)^{-1}$. Обратная матрица к матрице

$E-A=\begin{pmatrix} 0,4 & -0,6 \\ -0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$ имеет вид

$$S=(E-A)^{-1}=\frac{1}{0,4\cdot 0,5-(-0,2)\cdot(-0,6)}\begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 6,25 & 7,5 \\ 2,5 & 5,0 \end{pmatrix}.$$

Тогда для $Y_1=\begin{pmatrix} 80 \\ 60 \end{pmatrix}$ находим

$$X=(E-A)^{-1}Y=\begin{pmatrix} 6,25 & 7,5 \\ 2,5 & 5,0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 80 \\ 60 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 950 \\ 500 \end{pmatrix}.$$

Найдем равновесные цены, доставляющие норму добавленной стоимости на уровне 0,24 и 0,28.

Модель равновесных цен описывается уравнение $P=A^T P+V$, где по условию $V=\begin{pmatrix} 0,24 \\ 0,28 \end{pmatrix}$. Для нахождения равновесных цен можно использовать формулу $P=S^T\cdot V$, откуда:

$$P=S^T\cdot V=\begin{pmatrix} 6,25 & 7,5 \\ 2,5 & 5,0 \end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix} 0,24 \\ 0,28 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6,25 & 2,5 \\ 7,5 & 5,0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0,24 \\ 0,28 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2,2 \\ 3,2 \end{pmatrix}.$$

Цены равны $p_1=2,2$, $p_2=3,2$