Экзаменационный билет № 287770

Ф.И.О. студента ______________________ Группа __________

Дата экзамена __________

1. Вычислите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+4n-7}{8n^3-n^2+7n-6}$.

2. Продифференцируйте функцию $f(x)=\dfrac{\cos x}{-x+3}$. Преобразовывать и упрощать выражение производной не нужно.

3. Для функции $f(x)=\dfrac{3}{4}x^5-\dfrac{35}{4}x^4-20x^3-4x-7$ найдите промежутки выпуклости (выпуклости вниз), вогнутости (выпуклости вверх), а также укажите точки перегиба.

4. Вычислите определенный интеграл $\int\limits_{\frac{6}{7}}^{1}(6-7x)^7dx$.

5. Найдите точки локальных экстремумов функции и определите их вид $f(x;y)=5x^2+8y^2-xy-4x-95y-4$.

6. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{7n-6}$.

7. Решите задачу Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка $y''+6y'+9y=0,\ y(0)=8,\ y'(0)=-19$.

8. В математической модели рынка некоторого товара с функцией спроса $D(p)=122-12p-9p^2$ и с функцией предложения $S(p)=7p^2+4p-70$, где p — цена товара в рублях, вычислите эластичность предложения в точке рыночного равновесия.

Решение задачи 1

Поделим числитель и знаменатель на n^2.

Получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n-7}{8n^3-n^2+7n-6}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+4/n-7/n^2}{8n-1+7/n-6/n^2}=\left(\frac{3}{\infty}\right)=0.$$

Ответ: 0

Решение задачи 2

Вычисляем производную от частного

$$f'(x)=\left(\frac{\cos x}{-x+3}\right)'=$$
$$=\frac{(\cos x)'\cdot(-x+3)-(\cos x)\cdot(-x+3)'}{(-x+3)^2}=$$
$$=\frac{-\sin x\cdot(-x+3)-(\cos x)\cdot(-1)}{(-x+3)^2}=$$
$$=\frac{-\sin x\cdot(-x+3)+\cos x}{(-x+3)^2}.$$

Ответ: $\dfrac{-\sin x\cdot(-x+3)+\cos x}{(-x+3)^2}$

Решение задачи 3

Чтобы исследовать выпуклость функции, надо найти ее вторую производную. Сначала найдем первую производную:

$$f'(x)=\left(\frac{3}{4}x^5-\frac{35}{4}x^4-20x^3-4x-7\right)'=$$
$$=\frac{3}{4}\cdot 5x^4-\frac{35}{4}\cdot 4x^3-20\cdot 3x^2-4-0=$$
$$=\frac{15}{4}\cdot x^4-35x^3-60x^2-4.$$

Теперь вычисляем вторую производную:

$$f''(x)=\left(\frac{15}{4}\cdot x^4-35x^3-60x^2-4\right)'=$$
$$=\frac{15}{4}\cdot 4x^3-35\cdot 3x^2-60\cdot 2x^1-0=$$
$$=15x^3-105x^2-120x.$$

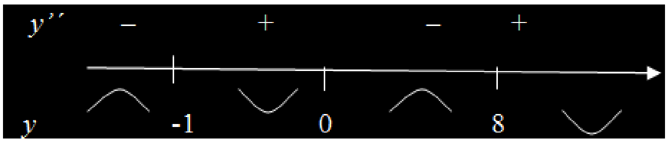
Теперь приравняем вторую производную к нулю, чтобы найти точки перегиба:

$$f''(x)=0,$$
$$15x^3-105x^2-120x=0,$$
$$x^3-7x^2-8x=0,$$
$$x\left(x^2-7x-8\right)=0,$$
$$x(x-8)(x+1)=0,$$
$$x_1=0, x_2=8, x_3=-1.$$

Нашли точки перегиба:

$x_1 = 0, x_2 = 8, x_3 = -1.$

Проверим знак второй производной на интервалах, на которые точки делят числовую прямую, чтобы найти интервалы выпуклости/вогнутости.



Функция выпукла вверх (вогнута) на интервалах

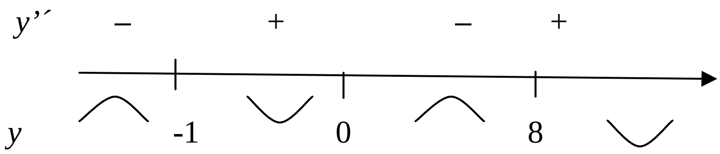
$(-\infty;-1)$, $(0;8)$, выпукла вниз (выпукла) на

интервалах $(-1;0)$, $(8;+\infty)$.

Точка перегиба: $x = 0$, $x = -1$ и $x = 8$.

Значения функции в этих точках:

$f(0) = -7$, $f(-1) = 7{,}5$, $f(8) = -21543$



Решение задачи 4

Вносим выражение $(6-7x)$ под знак дифференциала:

$$\int_{6/7}^{1} (6-7x)^7\,dx = -\frac{1}{7}\cdot\int_{6/7}^{1} (6-7x)^7\,d(6-7x) =$$

$$= -\frac{1}{7}\cdot\left.\frac{(6-7x)^8}{8}\right|_{6/7}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{56}\left((6-7\cdot 1)^8 - \left(6-7\cdot\frac{6}{7}\right)^8\right) =$$

$$= -\frac{1}{56}\left((-1)^8 - (0)^8\right) = -\frac{1}{56}.$$

Ответ: $-\frac{1}{56}$

Решение задачи 5

Находим стационарные точки. Вычисляем частные производные первого порядка и приравниваем к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \left(5x^2 + 8y^2 - xy - 4x - 95y - 4\right)_x' = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = \left(5x^2 + 8y^2 - xy - 4x - 95y - 4\right)_y' = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x - y - 4 = 0, \\ 16y - x - 95 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 10x - 4, \\ 16(10x - 4) - x - 95 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 10x - 4, \\ 160x - 64 - x - 95 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 10x - 4, \\ 159x = 159; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 6. \end{cases}$$

Стационарная точка $M(1;6)$.

Находим вторые производные в этой точке:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (10x - y - 4)_x' = 10,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (10x - y - 4)_y' = -1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (16y - x - 95)_y' = 16.$$

Получаем матрицу вторых производных

$B = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -1 & 16 \end{pmatrix}$, определитель которой равен:

$|B| = \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -1 & 16 \end{vmatrix} = 16 \cdot 10 - (-1)^2 = 159 > 0$, значит, в этой точке есть экстремум. Это минимум, так как $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10 > 0$.

Получаем: $f_{\min} = f(1;6) = -291$.

Решение задачи 6

Ряд знакочередующийся. Рассмотрим ряд из модулей: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7n-6}$. Исследуем данный ряд на сходимость по признаку сравнения. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{7n-6}:\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{7n-6}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{7-6/n}=\frac{1}{7-0}=\frac{1}{7}\neq 0,\infty,$$

а гармонический ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7n-6}$ также расходится

Рассмотрим тогда исходный знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{7n-6}$. Он сходится по признаку Лейбница, так как общий член $a_n=\frac{1}{7n-6}\to 0$ при $n\to\infty$ и монотонно убывает. Так как ряд из модулей расходится (см. выше), ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{7n-6}$ **сходится условно.**

Решение задачи 7

Составим для уравнения $y''+6y'+9y=0$ характеристическое уравнение:

$k^2+6k+9=0$.

Решаем его:

$k^2+6k+9=0,$

$(x+3)^2=0,$

$x_1=-3, x_2=-3.$

Так как корень действительный кратности 2, общее решение уравнения имеет вид:

$y(x)=C_1e^{-3x}+C_2x\cdot e^{-3x}$.

Теперь найдем значения постоянных C_1 и C_2 из начальных условий. Найдем производную решения:

$y'(x)=-3C_1e^{-3x}+C_2\cdot e^{-3x}-3C_2x\cdot e^{-3x}.$

Подставляем: $y(0)=8, y'(0)=-19$. Получим:

$$\begin{cases} y(0)=C_1+0=8, \\ y'(0)=-3C_1+C_2-0=-19; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1=8, \\ -24+C_2=-19; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1=8, \\ C_2=5. \end{cases}$$

Получили решение задачи Коши:

$$y(x)=8e^{-3x}+5x\cdot e^{-3x}$$

Решение задачи 8

Эластичность предложения $S(p)$ по цене

можно найти по формуле: $E_s=S'\cdot\dfrac{p}{S}$.

Вычисляем производную:

$$S'(p)=\left(7p^2+4p-70\right)'=14p+4.$$

Получаем формулу:

$$E_s=\frac{(14p+4)p}{7p^2+4p-70}.$$

Теперь найдем точку рыночного равновесия p_0, приравняв спрос и предложение:

$$D(p)=S(p),$$

$$122-12p-9p^2=7p^2+4p-70,$$

$$16p^2+16p-192=0,$$

$$p^2+p-12=0,$$

$$p_1=3,\ p_2=-4.$$

Отрицательный корень отбрасываем (так как речь идет о цене, она всегда неотрицательна), получаем $p_0=3$ - равновесная цена.

Эластичность в этой точке равна:

$$E_s(3)=\frac{(14\cdot3+4)\cdot3}{7\cdot3^2+4\cdot3-70}=\frac{138}{5}=27,6.$$