Билет

БИЛЕТ № 2 (третий семестр 2014/2015 учебного года)

№ п/п	Условия задач
1.1	Необходимо расставить пять охранников по пяти постам. Подсчитать количество способов, которыми можно осуществить эту операцию.
1.2	Известно, что P(A)=0,5; P(B)= 0,6; P (A ∩ B) =0,3. Найти P_AB .
1.3	Стрелок производит 10 выстрелов. Вероятность попадания p=0,4. Найти наивероятнейшее число попаданий K□.
2.1	Случайная величина X задана рядом распределения (X: 1; 3; 5; 7 — P: 0,1; 0,2; 0,2; 0,5). Вычислить дисперсию
2.2	Случайная величина X распределена нормально с параметрами $(a=7,\sigma=3)$. Вычислить вероятность P(4<X<10)
2.3	Случайная величина X распределена нормально с параметрами $(a=7,\sigma=3)$. Найти вероятность попадания на интервал (-2; 16).
3.1	По выборке: 1;3;2;3;0;4;3;2;4;1. Составить статистический ряд и найти несмещенную оценку математического ожидания генеральной совокупности
3.2	Найти Δ для доверительного интервала математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности с надежностью γ=0,99 по данной выборке, если генеральное среднее квадратическое отклонение σ=3 : 95;97;98;99;100;101;101;103;106.
3.3	Заданы функции спроса $Q=Q_d(p)$ и предложения $Q=Q_s(p)$, где p-цена за единицу товара. При каком значении p спрос равен предложению, если $Q_d(p)$=8-p; $Q_s(p)$=6+0,25p?

Ряд распределения к задаче 2.1:

X	1	3	5	7
P	0,1	0,2	0,2	0,5

Решения задач 1.4, 2.4 и 3.4 привести на оборотной стороне этого листа.

№ п/п	Условия задач
1.4	Дано: P (A ∪ B) = 0,6; P (A ∩ B) = 0,3; P_BA = 0,6. Найдите P(A), P(B), P_AB и вы... зависимы ли события A и B.
2.4	СВ X распределена по показательному закону с параметром μ = 2. Найти вероя... P(X>1), P(X<2), P(X>-1), P(X=3), $P_{(X>0)}$(X>1), математическое ожидание. Напис... функцию распределения и нарисовать ее примерный график.
3.4	Найти уравнение линейной регрессии и построить график функции, устан... зависимость сбыта от цены товара по следующим данным:

Цена товара (руб.)	2	3	4	6	10
Сбыт (шт.)	45	30	10	10	5

Решение

1.1	Необходимо расставить пять охранников по пяти постам. Подсчитать количество способов, которыми можно осуществить эту операцию.

Решение. Так как речь идет о перестановках пяти различных объектах, используем формулу для числа перестановок: $P_n = n!$ для $n=5$, получаем

$N = P_5 = 5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$ способов.

Ответ: 120

1.2	Известно, что P(A)=0,5; P(B)= 0,6; P (A ∩ B) =0,3. Найти P_AB .

Решение. По формуле условной вероятности
$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$. Подставляем известные вероятности и находим:
$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0,3}{0,5}=0,6.$
Ответ: 0,6.

1.3	Стрелок производит 10 выстрелов. Вероятность попадания p=0,4. Найти наивероятнейшее число попаданий K□.

Решение. Наивероятнейшее число попаданий находится из формулы
$$np-q\le k<np+p$$
Здесь $p=0,4$ (вероятность попадания),
$q=1-p=0,6$,
$n=10$ – число выстрелов.

Подставляя данные значения, получаем:
$10\cdot 0,4-0,6\le k<10\cdot 0,4+0,4,$
$3,4\le k<4,4,$
откуда $k=4$.
Ответ: 4 попадания.

2.1 Случайная величина X задана рядом распределения

X	1	3	5	7
P	0,1	0,2	0,2	0,5

Вычислить дисперсию

Решение. Сначала найдем математическое ожидание
$M(X)=\sum x_i p_i=1\cdot 0,1+3\cdot 0,2+5\cdot 0,2+7\cdot 0,5=5,2..$
Тогда дисперсия
$D(X)=\sum (x_i)^2 p_i-(M(X))^2=$
$=1^2\cdot 0,1+3^2\cdot 0,2+5^2\cdot 0,2+7^2\cdot 0,5-5,2^2=4,36.$

Ответ: 4,36

2.2	Случайная величина X распределена нормально с параметрами $(a=7,\sigma=3)$. Вычислить вероятность P(4<X<10)

Решение. Используем формулу для нахождения вероятности попадания нормальной случайной величины в интервал:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),\quad \text{где}\quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}dz$$

- функция Лапласа (значения берутся из таблицы), $a = 7$ - математическое ожидание, $\sigma = 3$ - среднее квадратическое отклонение. Получаем:

$$P(4 < X < 10) = \Phi\left(\frac{10-7}{3}\right) - \Phi\left(\frac{4-7}{3}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) =$$

$$= \Phi(1) + \Phi(1) = 2\cdot\Phi(1) = 2\cdot 0,3413 = 0,6826.$$

Ответ: 0,6826

2.3	Случайная величина X распределена нормально с параметрами $(a = 7, \sigma = 3)$. Найти вероятность попадания на интервал (-2; 16).

Решение. Используем формулу для нахождения вероятности попадания нормальной случайной величины в интервал:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),\quad \text{где}\quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}dz$$

- функция Лапласа (значения берутся из таблицы), $a = 7$ - математическое ожидание, $\sigma = 3$ - среднее квадратическое отклонение. Получаем:

$$P(-2 < X < 16) = \Phi\left(\frac{16-7}{3}\right) - \Phi\left(\frac{-2-7}{3}\right) = \Phi(3) - \Phi(-3) =$$

$$= \Phi(3) + \Phi(3) = 2\cdot\Phi(3) = 2\cdot 0,4987 = 0,9974.$$

Ответ: 0,9974.

3.1	По выборке: 1;3;2;3;0;4;3;2;4;1. Составить статистический ряд и найти несмещенную оценку математического ожидания генеральной совокупности

Решение. Составим ряд:

x_i	Частота n_i
0	1
1	2
2	2
3	3
4	2

Тогда несмещенная оценка математического ожидания есть выборочное среднее:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum x_i n_i = \frac{0\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 2+3\cdot 3+4\cdot 2}{1+2+2+3+2} = \frac{23}{10} = 2,3.$$

Ответ: 2,3

совокупности

3.2	Найти Δ для доверительного интервала математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности с надежностью γ=0,99 по данной выборке, если генеральное среднее квадратическое отклонение σ=3 : 95;97;98;99;100;101;101;103;106.

Решение. Используем формулу $\Delta = t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, где t_γ определяется по доверительной вероятности из таблицы распределения Лапласа $t_{0,99} = \Phi^{-1}(0,99/2) = \Phi^{-1}(0,495) = 2,58$, $\sigma = 3$, $n = 9$ (по условию).

Подставляем и находим:

$$\Delta = t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,58\cdot\frac{3}{\sqrt{9}} = 2,58.$$

Ответ: 2,58.

отклонение σ=3 : 95;97;98;99;100;101;101;103;106.

3.3	Заданы функции спроса $Q = Q_d(p)$ и предложения $Q = Q_s(p)$, где p-цена за единицу товара. При каком значении p спрос равен предложению, если $Q_d(p)$=8-p; $Q_s(p)$=6+0,25p?

Решение. Приравниваем спрос и предложение:

$Q_d(p) = Q_s(p)$,

$8 - p = 6 + 0,25p$,

$1,25p = 2$,

$p = 1,6$.

Получаем цену 1,6.

Ответ: 1,6.

Решения задач 1.4, 2.4 и 3.4 привести на оборотной стороне этого листа.

1.4	Дано: P (A ∪ B) = 0,6; P (A ∩ B) = 0,3; $P_B A$ = 0,6. Найдите P(A), P(B), $P_A B$ и выясните, зависимы ли события A и B.

Решение. Используем формулу для условной вероятности

$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ и формулу $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$.

Из первой найдем: $0,6=\dfrac{0,3}{P(B)}, \Rightarrow P(B)=0,5$. Теперь подставляем во вторую формулу: $0,6=P(A)+0,5-0,3, \Rightarrow P(A)=0,4$.

Найдем $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0,3}{0,4}=0,75$.

Так как $0,3=P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)=0,5\cdot 0,4=0,2$, события А и В зависимы.

2.4	СВ X распределена по показательному закону с параметром $\mu=2$. Найти вероятности $P(X>1)$, $P(X<2)$, $P(X>-1)$, $P(X=3)$, $P_{(X>0)}(X>1)$, математическое ожидание. Написать функцию распределения и нарисовать ее примерный график.

Решение. Найдем вероятности, используя формулу:
$P(a<X<b)=e^{-\mu a}-e^{-\mu b}=e^{-2a}-e^{-2b},\ a,b>0$.
Получаем:
$P(X>1)=P(1<X<\infty)=e^{-2}-e^{-\infty}=e^{-2}\approx 0,135.$

$P(X<2)=P(0<X<2)=e^{0}-e^{-4}=1-e^{-4}\approx 0,982.$

$P(X>-1)=1$, так как X принимает только значения большие нуля.

$P(X=3)=0$, так как X непрерывная случайная величина.

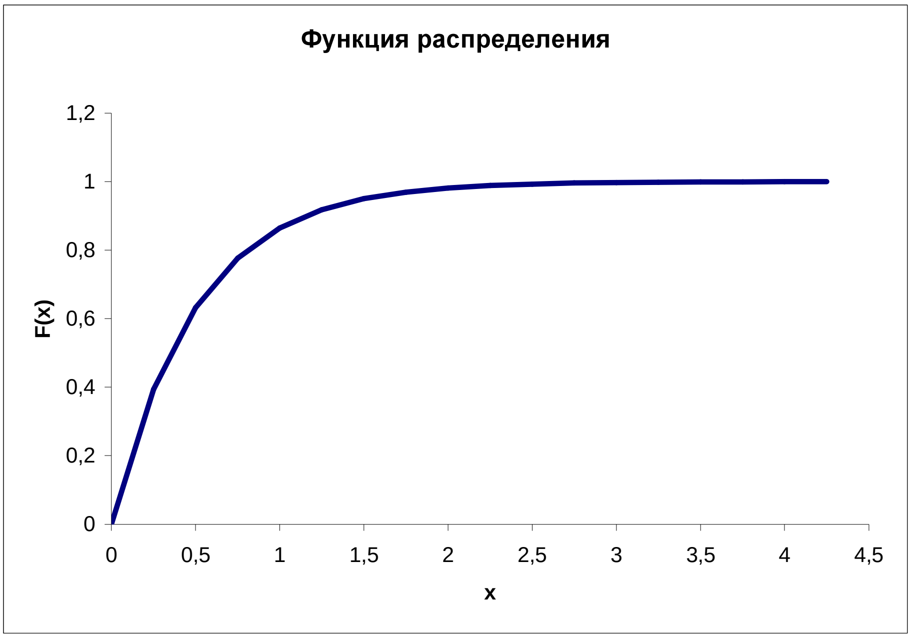
$$P_{(X>0)}(X>1)=\frac{P(X>1,X>0)}{P(X>0)}=\frac{P(X>1)}{P(X>0)}=\frac{P(1<X<\infty)}{1}=0,135.$$

Математическое ожидание $MX=\dfrac{1}{\mu}=\dfrac{1}{2}=0,5$

Так как СВ X распределена по показательному закону с параметром $\mu=2$, то функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x<0,\\ 1-e^{-2x},\ x\geq 0.\end{cases}$$

Построим график функции.



3.4 Найти уравнение линейной регрессии и построить график функции, устанавливающее зависимость сбыта от цены товара по следующим данным:

Цена товара (руб.)	2	3	4	6	10
Сбыт (шт.)	45	30	10	10	5

Решение. Параметры a и b уравнения линейной регрессии $y = ax + b$ по методу наименьших квадратов можно найти из системы уравнений:

$$\begin{cases} a\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum x_i y_i \\ a\sum x_i + bn = \sum y_i \end{cases}$$

где суммирование ведется по i от 1 до n, n = 5. Составим расчетную таблицу:

						Сумма
x_i	2	3	4	6	10	**25**
y_i	45	30	10	10	5	**100**
x_i^2	4	9	16	36	100	**165**
$x_i y_i$	90	90	40	60	50	**330**

Получаем систему:

$$\begin{cases} 165a + 25b = 330 \\ 25a + 5b = 100 \end{cases}$$

откуда находим $a = -4,25$, $b = 41,25$, то есть получаем функцию $y = -4,25x + 41,25$, которая выражает зависимость сбыта Y от цены товара X.

Ответ: $y = -4,25x + 41,25$