Итоговая контрольная по высшей математике
Вариант 4

Задача 1. Исследовать сходимость числового ряда.

А) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10n+1}$

Решение. Используем необходимый признак сходимости. Найдем предел общего члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{10n+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{10+1/n} = \frac{1}{10} \neq 0$$

Необходимое условие сходимости $\left(\lim_{n\to\infty} a_n = 0\right)$ не выполняется, ряд расходится.

Ответ: расходится

Б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n$

Решение. Вычисляем предел:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} \right) : \left(\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n \right) \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-n} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{4}{5}\right) \right) = \frac{4}{5} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{4}{5} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+1/n} \right) = \frac{4}{5} < 1.$$

Так как $D = 4/5 < 1$, ряд сходится по признаку Даламбера.

Ответ: сходится

В) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln n}$

Решение. Рассмотрим ряд из модулей: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$. Исследуем данный ряд на сходимость по признаку сравнения. Так как $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$, а гармонический ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ также расходится

Рассмотрим тогда исходный знакопеременный ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln n}$. Он сходится по признаку Лейбница, так как общий член $a_n=\frac{1}{\ln n}\to 0$ при $n\to\infty$ и монотонно убывает. Так как ряд из модулей расходится (см. выше), ряд $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln n}$ сходится условно.

Ответ: сходится условно.

Задача 2. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость ряда на границах интервала.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$$

Решение. Найдем радиус сходимости ряда:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}:\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=1.$$

Таким образом, ряд сходится абсолютно при

$|x+3|<1$,

$-1<x+3<1$,

$-4<x<-2$,

то есть при $x\in(-4;-2)$.

Исследуем сходимость на концах интервала.

Пусть $x=-2$, получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2+3)^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Это обобщенный гармонический ряд ($\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$) с показателем $p=2>1$, поэтому он сходится.

Пусть $x=-4$, получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4+3)^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$. Этот знакочередующийся ряд, он сходится по признаку Лейбница, так как $a_n=\frac{1}{n^2}\to 0$ при $n\to\infty$ и монотонно убывает. Более того, ряд сходится абсолютно, так как ряд из модулей (см. выше) сходится.

Итак, область сходимости ряда: $x\in[-4;-2]$.

Ответ: $x\in[-4;-2]$

Задача 3. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001. С этой целью подынтегральную функцию следует разложить в ряд, который затем почленно проинтегрировать.

$$\int_0^{1/2}\sqrt{1+x^3}\,dx.$$

Решение. Используем разложение:

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$$

Тогда $\sqrt{1+x^3}=\left(1+\left(x^3\right)\right)^{1/2}=1+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{8}x^6+\frac{1}{16}x^9-\ldots$

Подставляем в интеграл и получаем:

$$\int_0^{1/2}\sqrt{1+x^3}\,dx=\int_0^{0,5}\left(1+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{8}x^6+\frac{1}{16}x^9-\ldots\right)dx=$$

$$=\left(x+\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{56}x^7+\frac{1}{160}x^{10}-\ldots\right)\Bigg|_0^{0,5}=\left(0,5+\frac{1}{8}0,5^4-\frac{1}{56}0,5^7+\frac{1}{160}0,5^{10}-\ldots\right)=$$

$$=0,5+0,0078-0,0001+\ldots\approx 0,508.$$

Третий и последующие члены можно отбросить, при этом погрешность не превзойдет первого отброшенного члена 0,0001<0,001.

Ответ: 0,508.

Задача 4. Найти три первых, отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y=y(x)$ дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=y_0$.

$y'=x^2+y^2$, $y(0)=2$.

Решение. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение: $y'=x^2+y^2$.
Решение найдем с помощью ряда:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=y(x_0)+\frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

где $x_0=0$, то есть $y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$.

Вычислим коэффициенты при первых трех отличных от нуля слагаемых.

Коэффициенты при первом слагаемом находим из начальных условий:
$y(x_0)=y(0)=2.$

Найдем $y'(0)$, подставив $x=0$ в исходное уравнение:
$y'=x^2+y^2,\Rightarrow y'(0)=0^2+\left(y(0)\right)^2=0+4=4$.

Для нахождения последующих коэффициентов дифференцируем уравнение:
$y''=\left(x^2+y^2\right)'=2x+2yy',\Rightarrow y''(0)=0+2y(0)y'(0)=2\cdot2\cdot4=16.$

Получили:

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=2+\frac{4}{1!}x+\frac{16}{2!}x^2+\ldots=2+4x+8x^2+\ldots$$

Ответ: $y(x)=2+4x+8x^2+\ldots$

Задача 5. Разложить функцию $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0,\\ x, & 0<x<\pi\end{cases}$ в интервале $(-\pi;\pi)$.

Решение. Ряд Фурье на интервале $(-\pi;\pi)$ имеет вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right).$$

Вычислим коэффициенты ряда:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx=\frac{1}{\pi}\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0\cdot\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nxdx=\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\cos nxdx & v=\dfrac{1}{n}\sin nx\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{1}{n}x\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0\cdot\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nxdx=\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\sin nxdx & v=-\dfrac{1}{n}\cos nx\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx=-\frac{\pi(-1)^n}{n\pi}+\frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Получаем ряд Фурье**:**

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right).$$