

## ВАРИАНТ 5

Для изготовления различных изделий А, В, С предприятие использует 3 различных вида сырья. Используя данные таблицы:

Вид сырья	Нормы затрат сырья			Кол-во сырья
	А	В	С	
I	18	15	12	540
II	6	4	8	240
III	5	3	3	210
Прибыль	9	10	16	

1. Определите оптимальный план выпуска изделий из условия максимизации прибыли.
2. Определите статус каждого ресурса.
3. Определите ценность каждого ресурса и его приоритет при решении задачи увеличения запаса ресурсов.
4. Определите максимальный интервал изменения запасов ресурса I, в пределах которого текущее решение остается допустимым.
5. Производство какой продукции нерентабельно?
6. На сколько можно снизить запас каждого из ресурсов, чтобы это не привело к уменьшению прибыли?
7. Определите изменения величины прибыли при увеличении второго вида сырья на 10 ед.
8. Определите оптимальное решение задачи для случая, когда вектор ресурсов задан в виде  $\bar{b}=(400, 240, 210)$ .

### Решение.

1. *Определите оптимальный план выпуска изделий из условия максимизации прибыли.*

Составим математическую модель задачи по таблице данных:

Вид сырья	Нормы затрат сырья			Кол-во сырья
	А	В	С	
I	18	15	12	540
II	6	4	8	240

III	5	3	3	210
Прибыль	9	10	16	

Пусть предприятие производит  $x_1, x_2, x_3$  единиц продукции вида А, В и С соответственно.

Тогда задача заключается в следующем:

Максимизировать прибыль предприятия

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \rightarrow \max,$$

При ограничениях на ресурсы трех видов:

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \leq 540, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 240, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 210, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Решим задачу симплекс-методом.

Приведем задачу к каноническому виду, вводя дополнительные неотрицательные переменные:

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 = 540, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 240, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_6 = 210, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1, 6}.$$

Начальный план  $X = (0, 0, 0, 540, 240, 210)$ . Составляем первую симплекс-таблицу по задаче, записанной выше:

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5	x6
x4	540	18	15	12	1	0	0
x5	240	6	4	8	0	1	0
x6	210	5	3	3	0	0	1
F	0	-9	-10	-16	0	0	0

В последней оценочной строке есть отрицательные оценки, поэтому нужно делать шаг симплекс-метода. Выбираем столбец с наименьшей оценкой (оценка -16, столбец  $x_3$ ), а затем разрешающий элемент – по наименьшему отношению свободных членов (столбец План) к положительным коэффициентам столбца (строка  $x_5$ ). Результат шага запишем в таблицу (разрешающий элемент будем выделять серым).

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5	x6
x4	180	9	9	0	1	-3/2	0
x3	30	3/4	1/2	1	0	1/8	0
x6	120	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
F	480	3	-2	0	0	2	0

В последней оценочной строке есть отрицательные оценки, поэтому нужно делать шаг симплекс-метода. Выбираем столбец с наименьшей оценкой (оценка -2, столбец  $x_2$ ), а затем разрешающий элемент – по наименьшему отношению свободных членов к

положительным коэффициентам столбца (строка  $x_4$ ). Результат шага запишем в таблицу (разрешающий элемент будем выделять серым).

Базис	План	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_2$	20	1	1	0	1/9	-1/6	0
$x_3$	20	1/4	0	1	-1/18	5/24	0
$x_6$	90	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1
F	520	5	0	0	2/9	5/3	0

В последней строке нет отрицательных оценок, план найден:

$$x_1 = 0, x_2 = 20, x_3 = 20, F_{\max} = 520.$$

Таким образом, необходимо производить по изделий вида В и вида С (изделия вида А не производить вообще), при этом прибыль будет максимальна и составит 520.

## 2. Определите статус каждого ресурса.

Подставим оптимальный план в систему ограничений:

$$\begin{cases} 18 \cdot 0 + 15 \cdot 20 + 12 \cdot 20 = 540 \leq 540, \\ 6 \cdot 0 + 4 \cdot 20 + 8 \cdot 20 = 240 \leq 240, \\ 5 \cdot 0 + 3 \cdot 20 + 3 \cdot 20 = 120 \leq 210. \end{cases}$$

Получаем, что первые два ограничения выполняются как равенства, значит, ресурсы первого и второго вида полностью использованы, являются дефицитными. В третьем ограничении получаем  $120 < 210$ , то есть данный ресурс использован не полностью, есть избыток в размере 90 единиц, ресурс не дефицитный.

## 3. Определите ценность каждого ресурса и его приоритет при решении задачи увеличения запаса ресурсов.

В строке  $F$  оптимального плана в столбцах дополнительных переменных получаем:

Базис	План	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_2$	20	1	1	0	1/9	-1/6	0
$x_3$	20	1/4	0	1	-1/18	5/24	0
$x_6$	90	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1
F	520	5	0	0	2/9	5/3	0

Двойственные оценки:  $y^* = (2/9, 5/3, 0)$ .

Двойственные оценки определяют дефицитность (ценность) сырья. Так как  $y_1^*, y_2^* > 0$ , то, согласно второй теореме двойственности сырье 1-го и 2-го типа полностью используется в оптимальном плане и является дефицитным сырьем. Так как  $y_3^* = 0$ , сырье третьего вида есть в избытке, не дефицитное.

Кроме того, значения двойственных оценок показывают, насколько возрастает доход предприятия при увеличении дефицитного сырья на единицу (соответственно, на 2/9 и 5/3).

Таким образом, при решении задачи об увеличении запасов ресурсов в первую очередь надо увеличивать запасы ресурса второго вида, а потом уже ресурса первого вида.

4. Определите максимальный интервал изменения запасов ресурса  $I$ , в пределах которого текущее решение остается допустимым.

Определим максимальный интервал изменения запасов первого вида сырья, в пределах которого структура оптимального плана, т.е. номенклатура выпуска, не изменится. Другими словами, проведем анализ устойчивости двойственных оценок. Предельные изменения найдем из двойного неравенства:

$$\max_{k_{ij} > 0} (-x_j^* / k_{ij}) \leq \Delta b_i \leq \min_{k_{ij} < 0} (-x_j^* / k_{ij})$$

где  $\Delta b_i$  - величина изменения  $i$ -го типа сырья,  
 $k_{ij}$  - коэффициенты структурных сдвигов.

Для первого типа сырья имеем:

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5	x6
x2	20	1	1	0	1/9	-1/6	0
x3	20	1/4	0	1	-1/18	5/24	0
x6	90	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1
F	520	5	0	0	2/9	5/3	0

$$k_{12} = 1/9, k_{13} = -1/18, k_{16} = -1/6.$$

$$\max_{k_{1j} > 0} \left( -\frac{20}{1/9} \right) \leq \Delta b_1 \leq \min_{k_{1j} < 0} \left( \frac{20}{1/18}; \frac{90}{1/6} \right),$$

$$-180 \leq \Delta b_1 \leq 360.$$

Таким образом, интервал устойчивости двойственной оценки  $[b_1 - 180, b_1 + 360] = [540 - 180, 540 + 360] = [360, 900]$ .

5. Производство какой продукции нерентабельно?

Согласно оптимальному решению, нерентабельно производство продукции первого вида (изделия вида А), в оптимальном плане данное изделие отсутствует ( $x_1 = 0$ ).

6. На сколько можно снизить запас каждого из ресурсов, чтобы это не привело к уменьшению прибыли?

Запасы первого и второго ресурса снизить нельзя, они используются в плане полностью. Запас третьего ресурса можно уменьшить на 90 единиц. При этом план и прибыль останутся прежними (не уменьшатся).

7. Определите изменения величины прибыли при увеличении второго вида сырья на 10 ед.

Определим максимальный интервал изменения запасов первого вида сырья, в пределах которого структура оптимального плана, т.е. номенклатура выпуска, не изменится..  
 Предельные изменения найдем из двойного неравенства:

$$\max_{k_{ij} > 0}(-x_j^* / k_{ij}) \leq \Delta b_i \leq \min_{k_{ij} < 0}(-x_j^* / k_{ij})$$

где  $\Delta b_i$  - величина изменения  $i$ -го типа сырья,  
 $k_{ij}$  – коэффициенты структурных сдвигов.

Для второго типа сырья имеем:

Базис	План	x1	x2	x3	x4	x5	x6
x2	20	1	1	0	1/9	-1/6	0
x3	20	1/4	0	1	-1/18	5/24	0
x6	90	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1
F	520	5	0	0	2/9	5/3	0

$$k_{22} = -1/6, k_{23} = 5/24, k_{26} = -1/8.$$

$$\max_{k_{2j} > 0} \left( -\frac{20}{5/24} \right) \leq \Delta b_2 \leq \min_{k_{2j} < 0} \left( \frac{20}{1/6}; \frac{90}{1/8} \right),$$

$$-96 \leq \Delta b_2 \leq 120.$$

Таким образом, интервал устойчивости двойственной оценки  $[b_2 - 96, b_2 + 120]$ .

Поскольку увеличение запаса ресурса второго вида на 10 единиц ( $\Delta b_2 = 10$ ) попадает в интервал  $-96 \leq \Delta b_2 \leq 120$ , структура оптимального плана не изменится. Найдем новый оптимальный план:

Базис	План	x5	Изменение	Новый план
x2	20,00	- 1/6	-1 2/3	18,33
x3	20,00	5/24	2 1/12	22,08
x6	90,00	- 1/8	-1 1/4	88,75
F	520,00	1 2/3	16 2/3	536,67

Таким образом, в результате увеличения количества дефицитного ресурса второго вида на 10 единиц, производство изделий В уменьшится до 18,33 единиц, изделий вида С увеличится до 22,08 единиц. Суммарная прибыль предприятия увеличится на  $16 \frac{2}{3}$  и составит 536,67.

8. Определите оптимальное решение задачи для случая, когда вектор ресурсов задан в виде  $\bar{b}=(400, 240, 210)$ .

В данном случае количество сырья первого вида было уменьшено на  $540-400=140$  единиц. Так как уменьшение запаса ресурса первого вида на 140 единиц ( $\Delta b_1 = -140$ ) попадает в интервал  $-180 \leq \Delta b_1 \leq 360$ , структура оптимального плана не изменится. Найдем новый оптимальный план:

Базис	План	x4	Изменение	Новый план
x2	20,00	1/9	-15 5/9	4,44
x3	20,00	- 1/18	7 7/9	27,78
x6	90,00	- 1/6	23 1/3	113,33
F	520,00	2/9	-31 1/9	488,89

Таким образом, в результате уменьшения количества дефицитного ресурса первого вида на 140 единиц, производство изделий В уменьшится до 4,44 единиц, изделий вида С увеличится до 27,78 единиц. Суммарная прибыль предприятия уменьшится на  $31 \frac{1}{9}$  и составит 488,89.