Векторная алгебра. Контрольная работа

Задача 1. Длина вектора $\overline{a}$ равна t см, длина вектора $\overline{b}$ равна $t+2$ см, а угол между ними 60^0. Найдите длину вектора $(t+2)\overline{a}-t\overline{b}$.

Решение. По условию, длина вектора $\overline{a}$ равна 5 см, длина вектора $\overline{b}$ равна 7 см, а угол между ними 60^0. Найдем длину вектора $(t+2)\overline{a}-t\overline{b}=7\overline{a}-5\overline{b}$.

Вычислим скалярное произведение (квадрат длины вектора):

$$\left|7\overline{a}-5\overline{b}\right|^2=\left(7\overline{a}-5\overline{b},7\overline{a}-5\overline{b}\right)=49\left(\overline{a},\overline{a}\right)-70\left(\overline{a},\overline{b}\right)+25\left(\overline{b},\overline{b}\right)=$$

$$=49\left|\overline{a}\right|^2-70\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos\left(\overline{a}\,\overline{b}\right)+25\left|\overline{b}\right|^2=49\cdot5^2-70\cdot5\cdot7\cdot\cos60^0+25\cdot7^2=$$

$$=49\cdot25-70\cdot5\cdot7\cdot\frac{1}{2}+25\cdot49=1225.$$

Тогда длина вектора равна:

$$\left|7\overline{a}-5\overline{b}\right|=\sqrt{1225}=35.$$

Задача 2. Исследовать системы векторов $\left\{\overline{a}_i\right\}_{i=1}^4$ и $\left\{\overline{b}_i\right\}_{i=1}^4$ на линейную зависимость. В случае линейной зависимости привести пример нетривиальной линейной комбинации, равной нулевому вектору.

$$\overline{a_1}=(1,2,0,-4);\overline{a_2}=(2,3,1,0);\overline{a_3}=(1,3,-1,-12);\overline{a_4}=(1,0,2,12)$$
$$\overline{b_1}=(3,5,1,-4);\overline{b_2}=(1,0,4,-1);\overline{b_3}=(2,5,-3,-3);\overline{b_4}=(3,5,1,-4)$$

Решение.

А) Рассмотрим систему $\left\{\overline{a}_i\right\}_{i=1}^4$. Запишем матрицу из этих векторов:

$$A=\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&0&-4&x_1\\2&3&1&0&x_2\\1&3&-1&-12&x_3\\1&0&2&12&x_4\end{array}\right)$$

Справа допишем столбец x_i, чтобы отслеживать линейные комбинации векторов, которые будут получаться в результате преобразования матрицы.

Используя элементарные преобразования, приведем матрицу к упрощенному виду, который позволит выяснить, равен ли ее ранг 4 (вектора линейно независимы) или меньше (вектора зависимы).

$$A=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & x_1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 3 & -1 & -12 & x_3 \\ 1 & 0 & 2 & 12 & x_4 \end{array}\right)\sim$$

Прибавим к третьей строке вторую.
Вычитаем из четвертой строки вторую, умноженную на 2.
Получим:

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & x_1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & x_2 \\ 3 & 6 & 0 & -12 & x_3+x_2 \\ -3 & -6 & 0 & 12 & x_4-2x_2 \end{array}\right)\sim$$

Прибавим к четвертой строке третью:

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & x_1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & x_2 \\ 3 & 6 & 0 & -12 & x_3+x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_4+x_3-x_2 \end{array}\right).$$

Получили, что одна строка в матрице нулевая, значит, ее ранг точно меньше 4. Значит, вектора линейно зависимы.

Приведем пример нетривиальной линейной комбинации, равной нулевому вектору (используем комбинацию в правом столбце):
$\bar{a}_4+\bar{a}_3-\bar{a}_2=\bar{0}$.

Действительно:

$$\bar{a}_4+\bar{a}_3-\bar{a}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\-12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\3\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1-2\\0+3-3\\2-1-1\\12-12-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\bar{0}.$$

б) Рассмотрим систему $\left\{\bar{b}_i\right\}_{i=1}^{4}$. Запишем матрицу из этих векторов:

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 1 & -4 & x_1 \\ 1 & 0 & 4 & -1 & x_2 \\ 2 & 5 & -3 & -3 & x_3 \\ 3 & 5 & 1 & -4 & x_4 \end{array}\right)$$

Справа допишем столбец x_i, чтобы отслеживать линейные комбинации векторов, которые будут получаться в результате преобразования матрицы.

Используя элементарные преобразования, приведем матрицу к упрощенному виду, который позволит выяснить, равен ли ее ранг 4 (вектора линейно независимы) или меньше (вектора зависимы).

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 1 & -4 & x_1 \\ 1 & 0 & 4 & -1 & x_2 \\ 2 & 5 & -3 & -3 & x_3 \\ 3 & 5 & 1 & -4 & x_4 \end{array}\right)\sim$$

Вычитаем из четвертой строки первую.

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 1 & -4 & x_1 \\ 1 & 0 & 4 & -1 & x_2 \\ 2 & 5 & -3 & -3 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_4-x_1 \end{array}\right).$$

Получили, что одна строка в матрице нулевая, значит, ее ранг точно меньше 4. Значит, вектора линейно зависимы.

Приведем пример нетривиальной линейной комбинации, равной нулевому вектору (используем комбинацию в правом столбце):
$\overline{b}_4-\overline{b}_1=\overline{0}$.

Действительно:

$$\overline{b}_4-\overline{b}_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\overline{0}.$$

Задача 3. Написать разложение вектора $\overline{x}$ по векторам $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$.
$\overline{x}=(-4;4;4)$, $\overline{a}=(3;1;0)$, $\overline{b}=(-1;0;6)$, $\overline{c}=(-1;2;0)$.

Решение. Пусть $\overline{x}=x\overline{a}+y\overline{b}+z\overline{c}$. В виде системы это можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} 3x-1y-1z=-4, \\ 1x+0y+2z=4, \\ 0x+6y+0z=4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x-y-z=-4, \\ x+2z=4, \\ 6y=4; \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим $y=2/3$, подставляем в первое:

$$\begin{cases} 3x-2/3-z=-4, \\ x+2z=4, \\ y=2/3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - z = -10/3, \\ x + 2z = 4, \\ y = 2/3; \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 2.

$$\begin{cases} 6x - 2z = -20/3, \\ x + 2z = 4, \\ y = 2/3; \end{cases}$$

Прибавим первое уравнение ко второму:

$$\begin{cases} 6x - 2z = -20/3, \\ 7x = -8/3, \\ y = 2/3; \end{cases}$$

Выражаем из второго уравнения x и подставляем в первое:

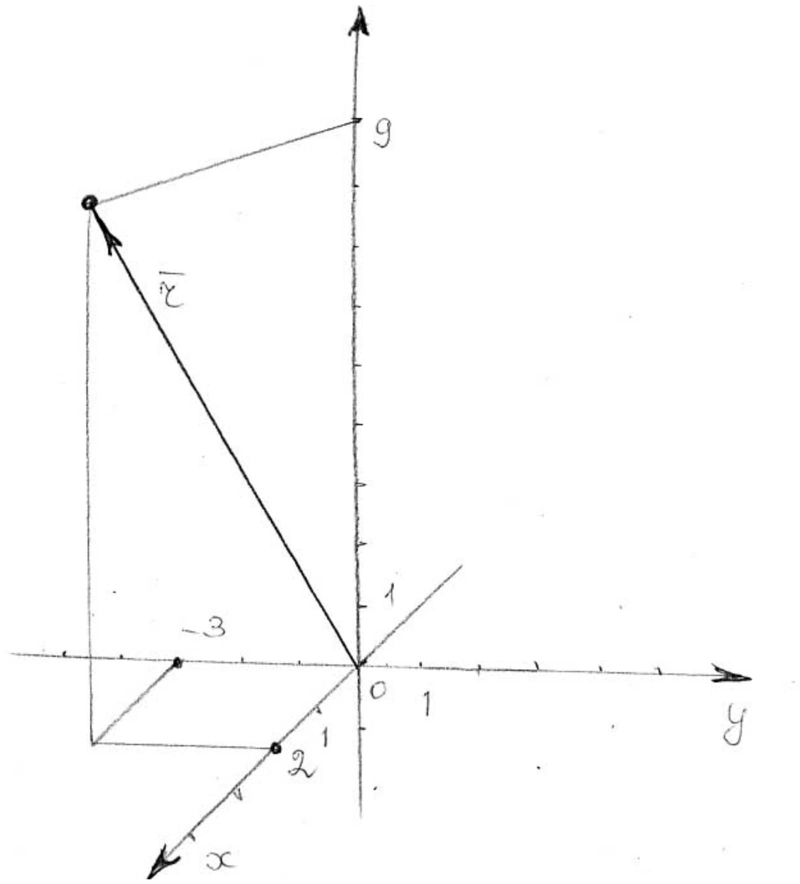
$$\begin{cases} -48/21 - 2z = -20/3, \\ x = -8/21, \\ y = 2/3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 46/21, \\ x = -8/21, \\ y = 2/3. \end{cases}$$

Получили разложение $\overline{x} = -\frac{8}{21}\overline{a} + \frac{2}{3}\overline{b} + \frac{46}{21}\overline{c}$

Задача 4. Построить вектор $\overline{r}$ и определить его длину и направление
$\overline{r} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + 9\overline{k}$

Решение. Строим вектор.



Длина вектора $\left|\bar{r}\right| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 9^2} = \sqrt{4+9+81} = \sqrt{94}$. Направление изображено на рисунке. Углы, образованные с осями координат, определяются направляющими косинусами: $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{94}}$, $\cos\beta = \dfrac{-3}{\sqrt{94}}$, $\cos\gamma = \dfrac{9}{\sqrt{94}}$.

Задача 5. Нормировать вектор $\bar{a} = \overline{AB}$.
$A(1;3;2)$, $B(7;8;0)$.

Решение. Сначала найдем координаты вектора:
$\bar{a} = \overline{AB} = (7-1; 8-3; 0-2) = (6;5;-2)$.

Вычисляем длину вектора: $\left|\bar{a}\right| = \sqrt{6^2 + 5^2 + (-2)^2} = \sqrt{36+25+4} = \sqrt{65}$.

Тогда нормированный вектор (единичной длины с таким же направлением):
$$\bar{e} = \frac{\bar{a}}{\left|\bar{a}\right|} = \frac{(6;5;-2)}{\sqrt{65}} = \left(\frac{6}{\sqrt{65}}; \frac{5}{\sqrt{65}}; -\frac{2}{\sqrt{65}}\right).$$

Задача 6. Найти угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\2\\3\\1\end{pmatrix};\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\3\end{pmatrix}.$$

Решение. Пусть угол между векторами равен φ, тогда

$$\cos\varphi=\frac{(a,b)}{|a|\cdot|b|}=\frac{2\cdot 2+2\cdot 1+3\cdot(-1)+1\cdot 3}{\sqrt{4+4+9+1}\cdot\sqrt{4+1+1+9}}=$$

$$=\frac{6}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{15}}=\frac{2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}}$$

Тогда угол $\varphi=\arccos\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}}\right)\approx 1{,}197$ радиан.