Контрольная работа по ТФКП

Задание 1.

Проверить выполнение условии Коши-Римана для функции $w = z+1+\dfrac{1}{z+1}$

Решение

Пусть $z = x+yi$, тогда получаем

$$w = x+yi+1+\frac{1}{x+yi+1} = x+yi+1+\frac{x+1-yi}{(x+1+yi)(x+1-yi)} = x+yi+1+\frac{x+1-yi}{(x+1)^2+y^2} =$$

$$= \left(x+1+\frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}\right)+i\left(y-\frac{y}{(x+1)^2+y^2}\right)$$

Тогда, получаем

$$u(x,y) = x+1+\frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}; v(x,y) = y-\frac{y}{(x+1)^2+y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1+\frac{(x+1)^2+y^2-(x+1)2(x+1)}{\left((x+1)^2+y^2\right)^2} = 1+\frac{y^2-(x+1)^2}{\left((x+1)^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2y(x+1)}{\left((x+1)^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 1-\frac{(x+1)^2+y^2-y2y}{(x+1)^2+y^2} = 1+\frac{y^2-(x+1)^2}{\left((x+1)^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{(x+1)2y}{\left((x+1)^2+y^2\right)^2} = \frac{2y(x+1)}{\left((x+1)^2+y^2\right)^2}$$

Значит,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Условие КР выполняются

Задание 2

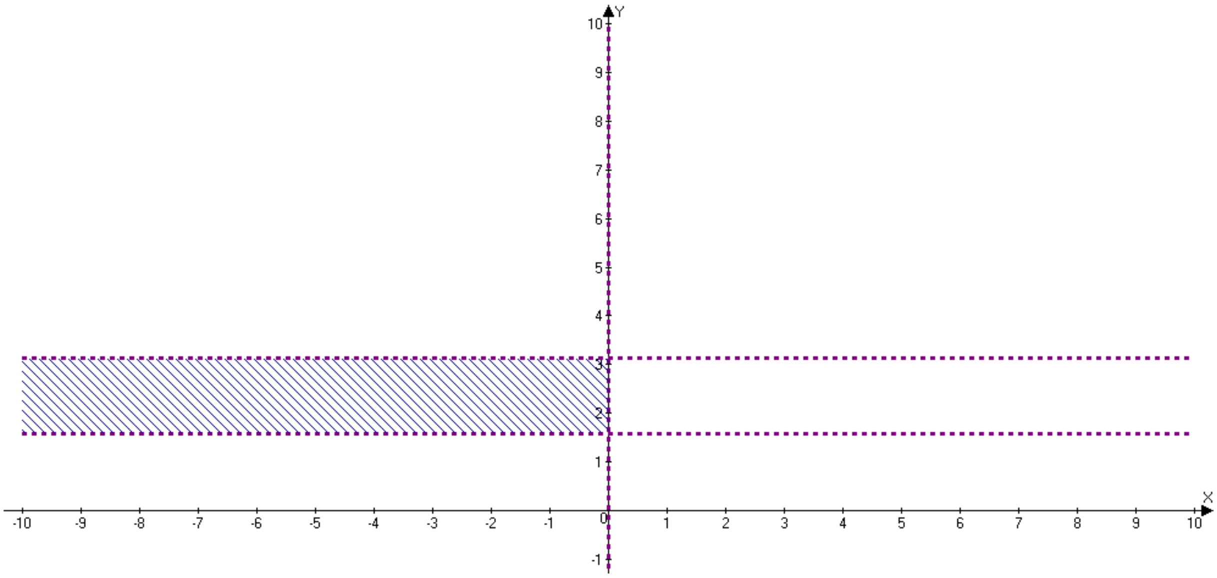
Найти область, в которую функция $w = e^z$ отображает область G, заданную на плоскости z. Нарисовать заданную и найденную области

$$G = \left\{\operatorname{Re} z < 0, \frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \pi\right\}$$

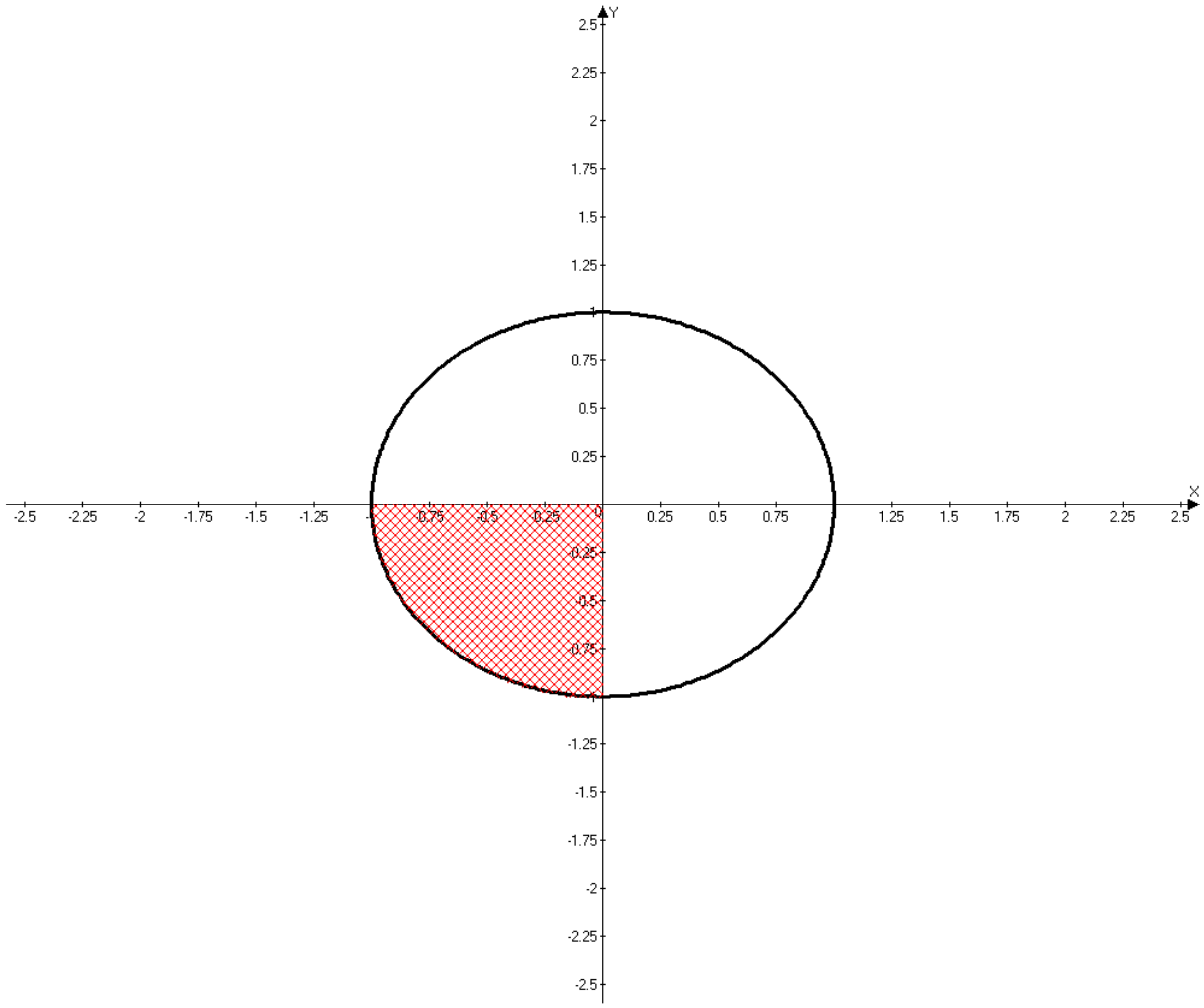
Решение

Изобразим область G

Пусть $z = x+yi$, тогда $\operatorname{Re} z < 0 \Rightarrow x < 0; \dfrac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \pi \Rightarrow \dfrac{\pi}{2} < y < \pi$



$|w| = |e^z| = e^x$, то при данном изменении величина $|w|$ изменяется на промежутке от 0=$e^{-\infty}$ до $1 = e^0$. Это значит, что образы всех точек полуполосы оказываются расположенными от начала координат не далее окружности радиуса 1. А так как $\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \pi$ и $\operatorname{Im} z = y = \arg w = \arg e^z$, то все точки указанной полосы находится в третей четверти системы координат



Задание 3
Найти вычеты функции в указанных точках

А) $\dfrac{3z+23}{(z-1)^2(z^2+25)}; z_1=1, z_2=5i$

Б) $(z+3)^2\cos\dfrac{3}{z-2}; z=2$

Решение

А)

Точка $z_1=1$ является полюсом второго порядка, поэтому

$$\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{3z+23}{(z-1)^2(z^2+25)}=\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{3z+23}{(z-1)^2(z^2+25)}(z-1)^2\right)\right]_{z=1}=\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{3z+23}{z^2+25}\right)\right]_{z=1}=$$

$$=\left[\frac{3(z^2+25)-2z(3z+23)}{(z^2+25)^2}\right]_{z=1}=\left[\frac{-3z^2-46z+75}{(z^2+25)^2}\right]_{z=1}=\frac{1}{26}$$

Точка $z_2=5i$ является полюсом первого порядка, поэтому

$$\operatorname*{Res}_{z=5i}\frac{3z+23}{(z-1)^2(z^2+25)}=\operatorname*{Res}_{z=5i}\frac{3z+23}{(z-1)^2(z+5i)(z-5i)}=\left[\frac{3z+23}{(z-1)^2(z+5i)(z-5i)}(z-5i)\right]_{z=5i}=$$

$$=\left[\frac{3z+23}{(z-1)^2(z+5i)}\right]_{z=5i}=-\frac{1}{52}+\frac{27}{260}i$$

Б)

Так как предела $\lim\limits_{z\to 2}(z+3)^2\cos\frac{3}{z-2}$ не существует, поэтому точка $z=2$ является существенно особой точкой. Разложим в ряд Лорана

$$(z+3)^2\cos\frac{3}{z-2}=(z^2+6z+9)\left(1-\frac{\left(\frac{3}{z-2}\right)^2}{2!}+\ldots\right)=(z^2-4z+4+10z+5)\left(1-\frac{\left(\frac{3}{z-2}\right)^2}{2}+\ldots\right)=$$

$$\left((z-2)^2+10(z-2)+25\right)\left(1-\frac{\left(\frac{3}{z-2}\right)^2}{2}+\ldots\right)=(z-2)^2+10(z-2)+25-$$

$$-\left((z-2)^2\frac{\left(\frac{3}{z-2}\right)^2}{2}+10(z-2)\frac{\left(\frac{3}{z-2}\right)^2}{2}+25\frac{\left(\frac{3}{z-2}\right)^2}{2}\right)+..=(z-2)^2+10(z-2)+25-\frac{9}{2}(z-2)+$$

$$+\frac{45}{z-2}+\frac{225}{2}\frac{1}{(z-2)^3}+\ldots$$

Коэффициент равен 45, значит, $\operatorname*{Res}_{z=2}(z+3)^2\cos\frac{3}{z-2}=45$

Задание 4

Разложить заданную функцию в ряд Лорана в окрестности точки z_0

А) $\frac{3z^3+z^2-7z+4}{z^2(z-1)^2}, z_0=0$

Б) $\frac{13z^2-58z+69}{(z-1)^2(z-3)(z-4)}, z_0=1$

в) $(2z^2-2z)e^{\frac{1}{2z+4}}, z_0=-2$

Решение

А)

Разложим функцию на слагаемые

$$\frac{3z^3+z^2-7z+4}{z^2(z-1)^2}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z^2}+\frac{C}{z-1}+\frac{D}{(z-1)^2}=\frac{Az(z-1)^2+B(z-1)^2+Cz^2(z-1)+Dz^2}{z^2(z-1)^2}$$

$$Az(z-1)^2+B(z-1)^2+Cz^2(z-1)+Dz^2=3z^3+z^2-7z+4$$

$$Az^3-2Az^2+Az+Bz^2-2Bz+B+Cz^3-Cz^2+Dz^2=3z^3+z^2-7z+4$$

$$\begin{cases}A+C=3\\-2A+B-C+D=1\\A-2B=-7\\B=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=4\\C=2\\D=1\end{cases}$$

$$\frac{3z^3+z^2-7z+4}{z^2(z-1)^2}=\frac{1}{z}+\frac{4}{z^2}+\frac{2}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}=\frac{1}{z}+\frac{4}{z^2}-\frac{2}{1-z}+\frac{1}{(z-1)^2}=\frac{1}{z}+\frac{4}{z^2}-\frac{2}{1-z}+\left(\frac{1}{1-z}\right)'=$$

$$=\frac{1}{z}+\frac{4}{z^2}-2\sum_{k=0}^{\infty}z^k+\left(\sum_{k=0}^{\infty}z^k\right)'=\frac{1}{z}+\frac{4}{z^2}-2\sum_{k=0}^{\infty}z^k+\sum_{k=1}^{\infty}kz^{k-1}$$

Б)

Разложим функцию на слагаемые

$$\frac{13z^2-58z+69}{(z-1)^2(z-3)(z-4)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{(z-1)^2}+\frac{C}{z-3}+\frac{D}{z-4}=\frac{A(z-1)(z-3)(z-4)+B(z-3)(z-4)+C(z-1)^2(z-4)+D(z-1)^2(z-3)}{(z-1)^2(z-3)(z-4)}$$

$$A(z-1)(z-3)(z-4)+B(z-3)(z-4)+C(z-1)^2(z-4)+D(z-1)^2(z-3)=13z^2-58z+69$$

$$A(z-1)(z^2-7z+12)+B(z^2-7z+12)+C(z^2-2z+1)(z-4)+D(z^2-2z+1)(z-3)=$$

$$=13z^2-58z+69$$

$$A(z^3-7z^2+12z-z^2+7z-12)+B(z^2-7z+12)+C(z^3-4z^2-2z^2+8z+z-4)+$$

$$+D(z^3-3z^2-2z^2+6z+z-3)=13z^2-58z+69$$

$$A(z^3-8z^2+19z-12)+B(z^2-7z+12)+C(z^3-6z^2+9z-4)+D(z^3-5z^2+7z-3)=13z^2-58z+69$$

$$\begin{cases}A+C+D=0\\-8A+B-6C-5D=13\\19A-7B+9C+7D=-58\\-12A+12B-4C-3D=69\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-2\\B=4\\C=-3\\D=5\end{cases}$$

$$\frac{13z^2-58z+69}{(z-1)^2(z-3)(z-4)}=-2\frac{1}{z-1}+\frac{4}{(z-1)^2}-3\frac{1}{z-3}+\frac{5}{z-4}=-2\frac{1}{z-1}+\frac{4}{(z-1)^2}+3\frac{1}{3-z}-5\frac{1}{4-z}=$$

$$=-2\frac{1}{z-1}+\frac{4}{(z-1)^2}+3\frac{1}{2-(z-1)}-5\frac{1}{3-(z-1)}=-2\frac{1}{z-1}+\frac{4}{(z-1)^2}+\frac{3}{2}\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}-\frac{5}{3}\frac{1}{1-\frac{z-1}{3}}=$$

$$=-2\frac{1}{z-1}+\frac{4}{(z-1)^2}+\frac{3}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^k-\frac{5}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{3}\right)^k$$

В)

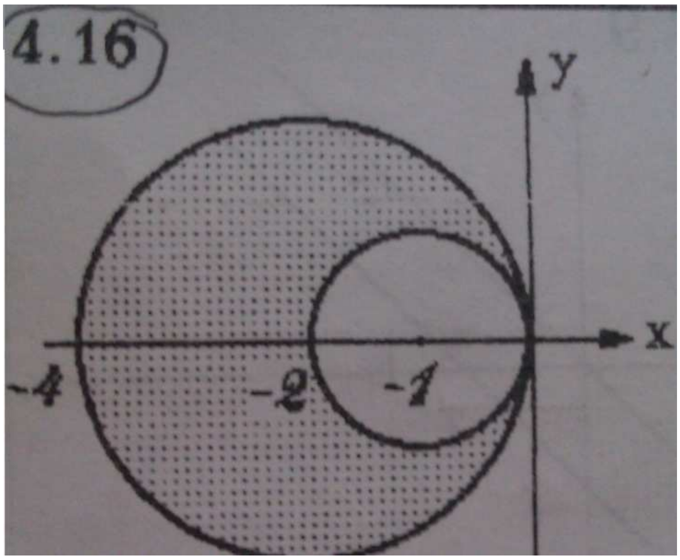
$$\left(2z^2-2z\right)e^{\frac{1}{2z+4}}=2z(z-1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2z+4}\right)^k}{k!}=2((z-2)+2)((z-2)+1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k k!}\frac{1}{(z+2)^k}=$$

$$=\left((z-2)^2+3(z-2)+2\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}k!}\frac{1}{(z+2)^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}k!}\frac{1}{(z+2)^{k-2}}+3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}k!}\frac{1}{(z+2)^{k-1}}+$$

$$+2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}k!}\frac{1}{(z+2)^k}$$

Задание 5

Найти область, в которую функция $w=\frac{1}{z}$ отображает заштрихованную область



Решение

Большая окружность задается неравенством $x^2+y^2\le -4x$, меньшая $x^2+y^2\ge -2x$

Пусть $z=x+yi, w=u+yi$, тогда $x+yi=\frac{1}{u+iv}=\frac{u}{u^2+v^2}-i\frac{v}{u^2+v^2}$

Отсюда имеем

$$x=\frac{u}{u^2+v^2}, y=-\frac{v}{u^2+v^2}, x^2+y^2=\frac{1}{u^2+v^2}$$

Для большей окружности получаем

Поскольку $-4x=\frac{-4u}{u^2+v^2}$, то их уравнения окружности получаем

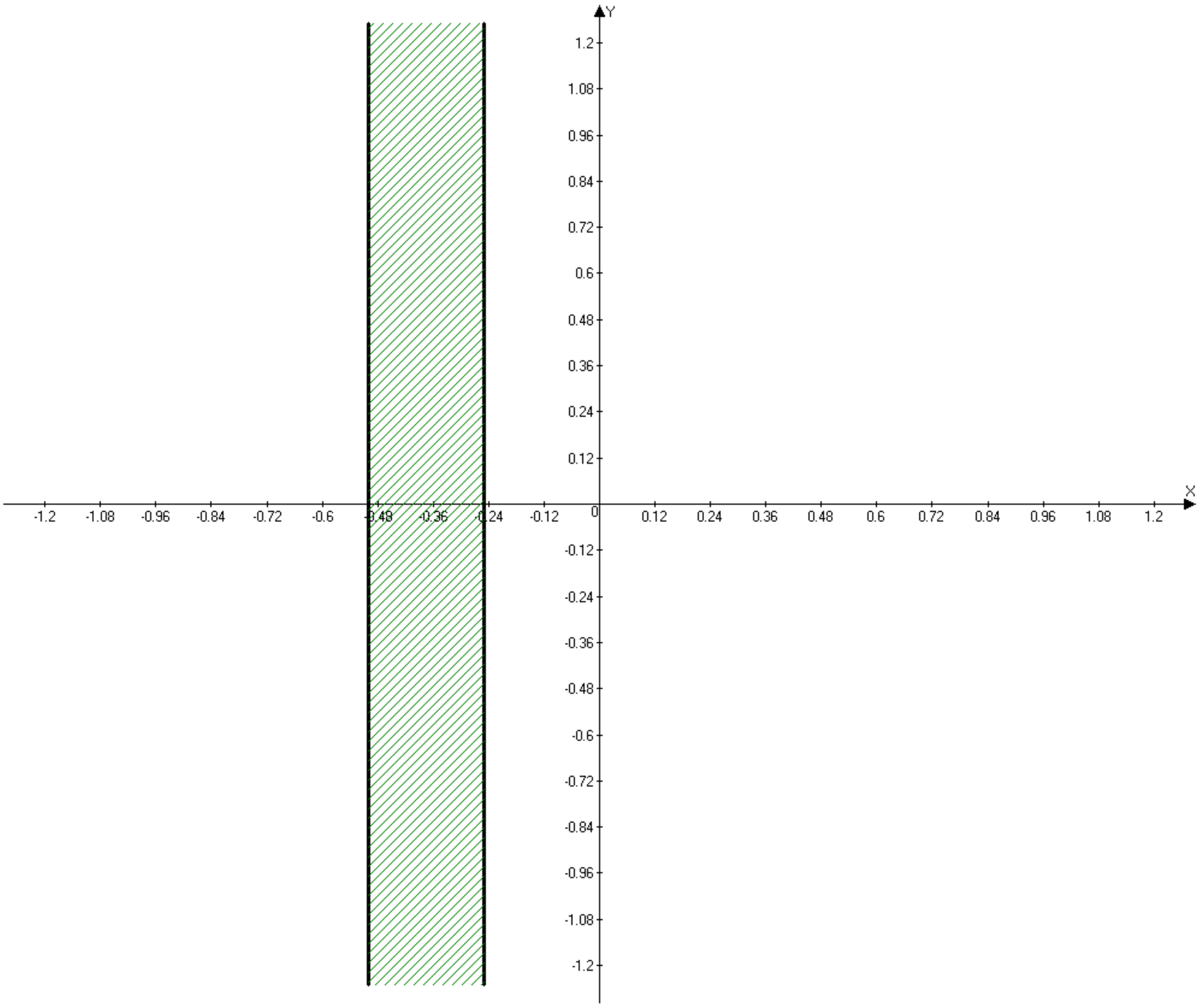
$$x^2+y^2\le\frac{-4u}{u^2+v^2}\Rightarrow\frac{1}{u^2+v^2}\le\frac{-4u}{u^2+v^2}\Rightarrow u\le-\frac{1}{4}$$

Аналогично для маленькой окружности получаем

Поскольку $-2x=\frac{-2u}{u^2+v^2}$, то их уравнения окружности получаем

$$x^2+y^2 \ge \frac{-2u}{u^2+v^2} \Rightarrow \frac{1}{u^2+v^2} \ge \frac{-2u}{u^2+v^2} \Rightarrow u \ge -\frac{1}{2}$$

Изобразим полученную область



Задание 6

Вычислить с помощью вычетов интегралы по замкнутому контуру С, обходимому в положительном направлении

А) $\int\limits_C \frac{dz}{(z^2-1)(z-1+i)^2}, \tilde{N}: |z-2|=2$

Б) $\int\limits_C \left(2z^3+16z^2+39z+32\right)e^{-\frac{1}{z+2}}, \tilde{N}: |z+3|=12$

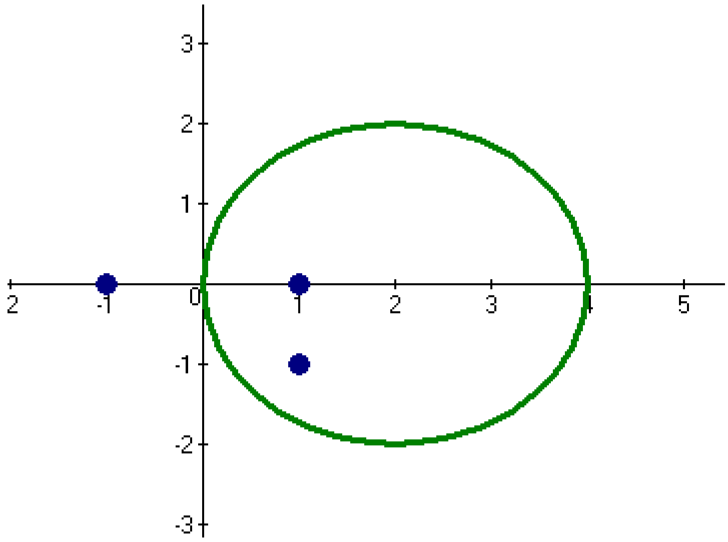
В) $\int\limits_C \frac{z^2+3}{\left(z^2+4z+6\right)\ln\left(1+tg\,2z\right)}, \tilde{N}$ - ромб с вершинами в точках $\pm 2i, \pm\frac{1}{2}$

Решение

А)

Особые точки $z=\pm 1, z=1-i$

Сделаем чертеж



Точки $z=1, z=1-i$ лежат внутри окружности $|z-2|=2$

Значит, необходимо вычислить вычеты в этих точках

Точка $z=1$ - полюс первого порядка

$$\operatorname*{Re}_{z=1}s\frac{1}{(z^2-1)(z-1+i)^2}=\lim_{z\to 1}\frac{1}{(z^2-1)(z-1+i)^2}(z-1)=\lim_{z\to 1}\frac{1}{(z+1)(z-1+i)^2}=\frac{1}{(1+1)(-1)}=-\frac{1}{2}$$

В точке $z=1-i$ получаем полюс второго порядка

$$\operatorname*{Re}_{z=1-i}s\frac{1}{(z^2-1)(z-1+i)^2}=\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z^2-1)(z-1+i)^2}(z-1+i)^2\right)\right]_{z=1-i}=\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z^2-1}\right)\right]_{z=1-i}=$$

$$=\left[\frac{-2z}{(z^2-1)^2}\right]_{z=1-i}=-2\frac{1-i}{((1-i)^2-1)^2}=\frac{14}{25}+\frac{2}{25}i$$

Тогда, получаем,

$$\int_C\frac{dz}{(z^2-1)(z-1+i)^2}=2\pi i\left(-\frac{1}{2}+\frac{14}{25}+\frac{2}{25}i\right)=\frac{3}{25}\pi i-\frac{4}{25}\pi$$

Б)

$z=-2$ - особая точка. Данная точка лежит в круге $|z+3|=12$

Вычислим вычет в этой точке

Разложим подынтегральную функцию в ряд Лорана

$$\left(2z^3+16z^2+39z+32\right)e^{-\frac{1}{z+2}}=\left(2(z+2)^3+4(z+2)^2-(z+2)+2\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(z+2)^k}=$$

$$=2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(z+2)^{k-3}}+4\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(z+2)^{k-2}}-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(z+2)^{k-1}}+2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(z+2)^k}$$

Найдем коэффициент при показателе -1

$$\left(2z^3+16z^2+39z+32\right)e^{-\frac{1}{z+2}}=\left(2(z+2)^3+4(z+2)^2-(z+2)+2\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(z+2)^k}=$$

$$=2(-1)^4+4(-1)^3-(-1)^2+2(-1)^1=-1$$

Значит,

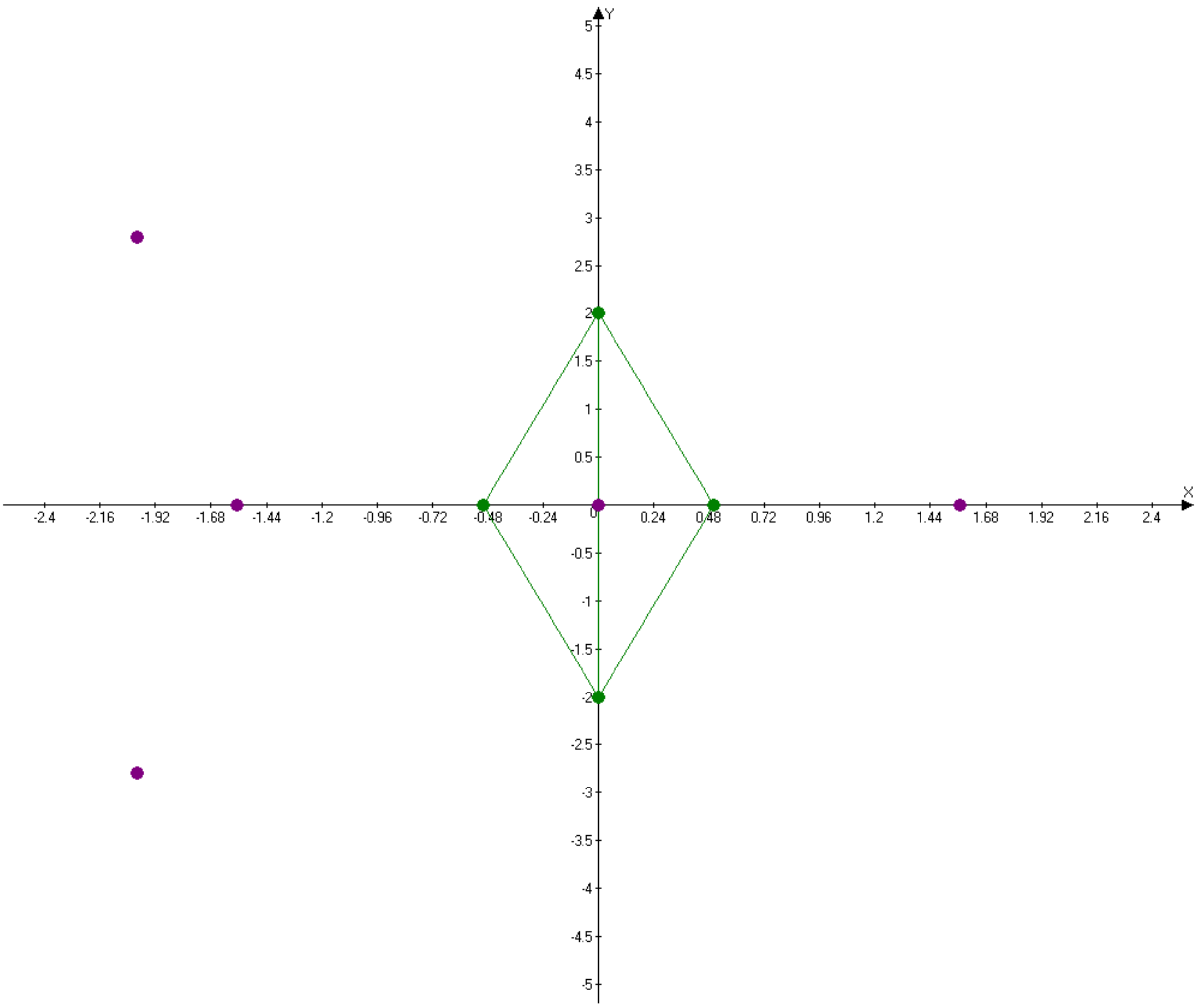
$$\int_C \left(2z^3+16z^2+39z+32\right)e^{-\frac{1}{z+2}}=2\pi i\left(-1\right)=-2\pi i$$

В)

Особые точки есть

$$z^2+4z+6=0 \qquad \ln\left(1+tg2z\right)=0$$
$$z=-2\pm2\sqrt{2}i \qquad 1+tg2z=1$$
$$z=-2\pm2\sqrt{2}i \qquad 2z=\pi n, n\in Z$$
$$z=-2\pm2\sqrt{2}i \qquad z=\frac{\pi n}{2}, n\in Z$$

Сделаем чертеж



Только точка $z=0$ лежит внутри области

Данная точка – полюс первого порядка

Найдем вычет в данной точке

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{z^2+3}{\left(z^2+4z+6\right)\ln\left(1+tg2z\right)}=\lim_{z\to0}\frac{z^2+3}{\left(z^2+4z+6\right)\ln\left(1+tg2z\right)}z=\left|\ln(1+tg2z)\sim tg2z\right|=$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{z^2+3}{\left(z^2+4z+6\right)tg2z}z=\lim_{z\to0}\frac{z^2+3}{\left(z^2+4z+6\right)\frac{\sin2z}{\cos2z}}z=\lim_{z\to0}\frac{\left(z^2+3\right)\cos2z}{2\left(z^2+4z+6\right)}\frac{2z}{\sin2z}=\frac{3}{2*6}=\frac{1}{4}$$

Значит,

$$\int_C \frac{z^2+3}{\left(z^2+4z+6\right)\ln\left(1+tg\,2z\right)}=2\pi i*\frac{1}{4}=\frac{\pi i}{2}$$