Решение задачи по предмету «Теория принятия решений»

Фирма «X» производит три типа химикатов. На предстоящий месяц эта фирма заключила контракт на поставку следующих количеств трех типов химикатов;

Тип химикатов	Продажи по контракту, кг
1	2000
2	3500
3	1800

Производство фирмы ограничено наличием времени на обработку химикатов в двух химических реакторах. Каждый вид химикатов должен быть обработан сначала в реакторе 1, а затем в реакторе 2. В следующей таблице приведен фонд рабочего времени в часах, имеющийся у каждого реактора в следующем месяце, а также время на обработку 1 кг каждого химиката в каждом реакторе (ч/кг).

	Химикаты			Возможности реактора, ч
	1	2	3	
Реактор 1	0,05	0,04	0,01	200
Реактор 2	0,02	0,06	0,03	150

Из-за ограниченных возможностей, связанных с временем на обработку в реакторах, фирма не имеет достаточных мощностей, чтобы удовлетворить спрос за счет производимой продукции. Следовательно, фирма должна купить какие-то химикаты на стороне, расширив за счет этих покупок свои возможности и перепродав эти химикаты своим потребителям. Ниже приводится таблица затрат на производство химикатов самой компанией и на покупку их на стороне.

Химикаты	Затраты на производство, тыс.руб./кг	Затраты на покупку, тыс.руб./кг
1	2,5	2,8

2	1,75	2,5
3	2,9	3,25

Цель фирмы состоит в том, чтобы выполнить заказ клиента с минимальными издержками. Это позволит ей получить максимальную прибыль. Другими словами, фирма должна принять решение: сколько и каких продуктов надо производить у себя, а сколько – купить на стороне.

Решение должно содержать следующие разделы:

- словесное описание задачи;
- построение математической модели;
- выбор, обоснование и описание метода решений рассматриваемой задачи;
- решение сформулированной задачи;
- анализ модели на чувствительность.

Решение:

Введем обозначения:
x_1 – количество химиката 1, производимого компанией (кг);
z_1 – количество химиката 1, закупаемого компанией (кг);
x_2 – количество химиката 2, производимого компанией (кг);
z_2 – количество химиката 2, закупаемого компанией (кг);
x_3 – количество химиката 3, производимого компанией (кг);
z_3 – количество химиката 3, закупаемого компанией (кг).

Для производства общего количества химиката 1 требуется затратить $0{,}05x_1$ часов работы реактора 1 и $0{,}02x_1$ часов работы реактора 2.

Для производства общего количества химиката 2 требуется затратить $0{,}04x_2$ часов работы реактора 1 и $0{,}06x_2$ часов работы реактора 2.

Для производства общего количества химиката 3 требуется затратить $0{,}01x_3$ часов работы реактора 1 и $0{,}03x_3$ часов работы реактора 2.

Следовательно, для производства всех трёх видов химикатов требуется затратить $(0{,}05x_1+0{,}04x_2+0{,}01x_3)$ часов работы реактора 1 и $(0{,}02x_1+0{,}06x_2+0{,}03x_3)$ часов работы реактора 2.

Т.к. фонд рабочего времени, имеющийся у каждого реактора в следующем месяце, ограничен следующими предельными значениями:
для первого реактора – 200 часов;
для второго реактора – 150 часов,
то получаем следующие ограничения на предельное время использования реакторов:
$0{,}05x_1+0{,}04x_2+0{,}01x_3 \le 200$;
$0{,}02x_1+0{,}06x_2+0{,}03x_3 \le 150$.

Используя заданные количества продаж по контрактам, получаем следующие ограничения на спрос каждого вида химикатов, учитывая произведённое и закупленное количество химиката:
$x_1 + z_1 = 2000$;
$x_2 + z_2 = 3500$;
$x_3 + z_3 = 1800$.

На производство каждого вида химикатов требуется затратить $2{,}5x_1$, $1{,}75x_2$ и $2{,}9x_3$ тыс. руб. соответственно, а на покупку – $2{,}8z_1$, $2{,}5z_2$ и $3{,}25z_3$ тыс. руб. соответственно.
Цель фирмы состоит в том, чтобы выполнить заказ клиента с минимальными издержками, т.е. получить максимальную прибыль. Следовательно, функцию затрат необходимо минимизировать:
$2{,}5x_1 + 1{,}75x_2 + 2{,}9x_3 + 2{,}8z_1 + 2{,}5z_2 + 3{,}25z_3 \to \min$.

Таким образом, получаем следующую математическую модель задачи:
Минимизировать целевую функцию:
$F = 2{,}5x_1 + 1{,}75x_2 + 2{,}9x_3 + 2{,}8z_1 + 2{,}5z_2 + 3{,}25z_3 \to \min$ (*величина затрат за месяц*)
при ограничениях на предельное время использования реакторов в течение месяца:

$$\begin{cases} 0{,}05x_1 + 0{,}04x_2 + 0{,}01x_3 \le 200 \\ 0{,}02x_1 + 0{,}06x_2 + 0{,}03x_3 \le 150 \end{cases}$$

при ограничениях на спрос:

$$\begin{cases} x_1 + z_1 = 2000 \\ x_2 + z_2 = 3500 \\ x_3 + z_3 = 1800 \end{cases}$$

и при выполнении условий неотрицательности всех переменных:

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ z_1 \ge 0,\ z_2 \ge 0,\ z_3 \ge 0.$$

Выбор, обоснование и описание метода решений рассматриваемой задачи

Т.к. все входящие в модель функции (ограничения и целевая функция) являются линейными, то данная задача относится к классу задач линейного программирования (ЛП), поэтому для ее решения необходимо применить один из методов решения задач ЛП. Т.к. математическая модель рассматриваемой задачи содержит шесть переменных, то для ее решения невозможно применить графический способ решения Универсальный метод решения таких задач – симплекс-метод.

Для решения задачи с помощью симплекс-метода необходимо первые два ограничения записать в виде равенств, вводя в каждое ограничение соответствующую остаточную неотрицательную переменную.

$$\begin{cases} 0{,}05x_1 + 0{,}04x_2 + 0{,}01x_3 + y_1 = 200 \\ 0{,}02x_1 + 0{,}06x_2 + 0{,}03x_3 + y_2 = 150 \\ x_1 + z_1 = 2000 \\ x_2 + z_2 = 3500 \\ x_3 + z_3 = 1800 \end{cases}$$

В результате введения дополнительных переменных получаем, что система разрешена относительно базисных переменных y_1, y_2, z_1, z_2, z_3 и, т.к. они принимают положительные значения, то задача нахождения исходного опорного решения решена.

$$\begin{cases} y_1 = 200 - 0,05x_1 - 0,04x_2 - 0,01x_3 \\ y_2 = 150 - 0,02x_1 - 0,06x_2 - 0,03x_3 \\ z_1 = 2000 - x_1 \\ z_2 = 3500 - x_2 \\ z_3 = 1800 - x_3 \end{cases}$$

Положив свободные переменные равными нулю, получим базисное решение $X_0 = (0;\ 0;\ 0;\ 200,\ 150,\ 2000,\ 3500,\ 1800)$, которое является допустимым, т.к. все переменные получились неотрицательными.

Выражаем целевую функцию через свободные переменные:

F=2,5x_1+1,75x_2+2,9x_3+2,8z_1+2,5z_2+3,25z_3=

= 2,5x_1+1,75x_2+2,9x_3+2,8(2000–x_1)+2,5(3500– x_2)+3,25(1800– x_3) =

= 20200–0,3x_1–0,75x_2–0,35x_3= 20200 – (0,3x_1+0,75x_2+0,35x_3).

Дальше решаем задачу, используя симплексные таблицы.

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	z_1	z_2	z_3
y_1	200	0,05	0,04	0,01	1	0	0	0	0
y_2	150	0,02	0,06	0,03	0	1	0	0	0
z_1	2000	1	0	0	0	0	1	0	0
z_2	3500	0	1	0	0	0	0	1	0
z_3	1800	0	0	1	0	0	0	0	1
F	20200	0,3	0,75	0,35	0	0	0	0	0
1 *итерация*									
y_1	100	11/300	0	-0,01	1	-2/3	0	0	0
x_2	2500	1/3	1	0,5	0	50/3	0	0	0
z_1	2000	1	0	0	0	0	1	0	0
z_2	1000	-1/3	0	-0,5	0	-50/3	0	1	0
z_3	1800	0	0	1	0	0	0	0	1
F	18325	0,05	0	-0,025	0	-12,5	0	0	0
2 *итерация*									
y_1	80/3	0	0	-0,01	1	-2/3	-11/300	0	0
x_2	5500/3	0	1	0,5	0	50/3	-1/3	0	0
x_1	2000	1	0	0	0	0	1	0	0
z_2	5000/3	0	0	-0,5	0	-50/3	1/3	1	0
z_3	1800	0	0	1	0	0	0	0	1
F	18225	0	0	-0,025	0	-12,5	-0,05	0	0

Т.к. все коэффициенты в последней строке отрицательны, получили оптимальный план:

F_{min} = 18225 при x_1=2000; x_2=5500/3≈1833,3; x_3 = 0;

z_1 = 0; z_2 = 5000/3≈1667,6; z_3 = 1800.

Таким образом, для того, чтобы издержки были минимальными, фирма должна:
1) выпускать всё количество 1-го химиката, требуемое по контракту,
2) выпускать 1833 кг и закупать 1667 кг 2-го химиката,
3) полностью закупать 3-й химикат.
В этом случае издержки фирмы составят 18225 тыс. руб. и будут минимальными.
Проводим *анализ модели на чувствительность.*

Основные результаты последней симплекс-таблицы

Управляемые переменные	Оптимальное значение	Решение
x_1	2000	Объем производства 1-го химиката должен быть равен 2000 кг в месяц
x_2	5500/3≈1833	Объем производства 2-го химиката должен быть равен 1883 кг в месяц
x_3	0	3-й химикат не производится
z_1	0	1-й химикат не закупается
z_2	5000/3≈1667	2-й химикат закупается в объёме 1667 кг в месяц
z_3	1800	3-й химикат закупается в объёме 1800 кг в месяц
F	18225	Издержки фирмы равны 18225 тыс. руб. в месяц

В модели рассматриваемой задачи фигурируют два ограничения со знаком $\le$, которые представляют собой ограничения на ресурсы.

Ресурс	Остаточная переменная	Статус ресурса
Фонд рабочего времени в часах, имеющийся у 1-го реактора в месяц	$y_1 = 80/3$	Недефицитный
Фонд рабочего времени в часах, имеющийся у 2-го реактора в месяц	$y_2 = 0$	Дефицитный

Положительное значение остаточной переменной указывает на неполное использование соответствующего ресурса, т.е. данный ресурс не является дефицитным. Если же остаточная переменная равна нулю, то это свидетельствует о полном потреблении соответствующего ресурса. Из таблицы видно, что ресурс 1, связанный с возможностями работы 1-го реактора, является недефицитным. Поэтому любое увеличение фонда рабочего времени 1-го реактора приведёт лишь к тому, что этот ресурс станет еще более недефицитным, а оптимальное решение задачи при этом не изменится.

Рассмотрим *ценность дефицитного ресурса* фонда рабочего времени 2-го реактора.

Коэффициент при переменной y_2 равен 12,5, т.е.

$$F=18225-(-0{,}025x_3-12{,}5y_2-0{,}05z_1)=18225+0{,}025x_3+12{,}5y_2+0{,}05z_1.$$

При увеличении переменной y_2 значение целевой функции увеличивается. Это соответствует тому, что уменьшение фонда рабочего времени 2-го реактора на 1 час приводит к увеличению издержек фирмы на 12,5 тыс. руб. Соответственно, увеличение фонда рабочего времени 2-го реактора на 1 час приводит к уменьшению издержек фирмы на 12,5 тыс. руб.

Максимальное изменение запаса ресурса

Предположим, что запас 2 ресурса изменился на Δ_2, т.е. фонд рабочего времени 2-го реактора составит 150+Δ_2 часов. При $\Delta_2 > 0$ запас данного ресурса увеличивается, при $\Delta_2 < 0$ – уменьшается. Оптимальное решение в данном случае будет иметь вид, представленный в таблице:

Базисные переменные	Решение
y_1	$80/3-(2/3)\Delta_2$
x_2	$5500/3+(50/3)\Delta_2$
x_1	2000
z_2	$5000/3-(50/3)\Delta_2$
z_3	1800
F	$18225-(12{,}5)\Delta_2$

Новая правая часть каждого ограничения представляет сумму двух величин: постоянной, которая стоит в правой части ограничений до введения Δ_2, и члена, линейно зависящего от Δ_2. Коэффициенты при Δ_2 во вторых слагаемых равны коэффициентам при y_2 в заключительной симплекс-таблице.

Т.к. введение Δ_2 сказывается лишь на правой части симплекс-таблицы, то изменение запаса ресурса может повлиять только на допустимость решения. Поэтому Δ_2 не может принимать значений, при которых какая-либо из базисных переменных становится отрицательной. Т.е. должны выполняться следующие ограничения:

$x_2 = 5500/3+(50/3)\Delta_2 \geq 0$,

$z_2 = 5000/3-(50/3)\Delta_2 \geq 0$,

$y_1 = 80/3-(2/3)\Delta_2 \geq 0$.

x_1 и z_3 при этом остаются постоянными, т.е. 1-й химикат полностью производится на фирме, а 3-й химикат полностью закупается.

Из 1-го неравенства получим: $\Delta_2 \geq -110$;

из 2-го неравенства получим: $\Delta_2 \leq 100$;

из 3-го неравенства получим: $\Delta_2 \leq 40$.

Следовательно, $-110 \leq \Delta_2 \leq 40$. Любое значение Δ_2, выходящее за пределы указанного интервала, приведет к недопустимости решения и новой совокупности базисных переменных. Таким образом, структура оптимального решения сохраняется при уменьшении фонда рабочего времени 2-го реактора на 110 (т.е. до 40 часов) и при увеличении фонда рабочего времени на 40 (т.е. до 190 часов).

Максимальное изменение коэффициентов целевой функции

1) Предположим, что затраты на производство 1-го химиката изменятся до $2,5+\delta_1$, где δ_1 может принимать как положительное, так и отрицательное значение. Целевая функция в этом случае имеет вид: $F = (2,5 + \delta_1)x_1 + 1,75x_2 + 2,9x_3 + 2,8z_1 + 2,5z_2 + 3,25z_3$.

Если провести необходимые симплексные преобразования, то последняя строка в последней симплекс-таблице имеет вид:

Базисные перемен.	Решение	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	z_1	z_2	z_3
F	$18225 + 2000\delta_1$	0	0	-0,025	0	-12,5	$-0,05 + \delta_1$	0	0

Коэффициенты при базисных переменных x_1, x_2, y_1, z_2, z_3 остаются равными 0. Это уравнение отличается от F-уравнения до введения δ_1 только наличием членов, содержащих δ_1. Коэффициенты при δ_1 равны коэффициентам при соответствующих переменных в строке x_1 последней симплекс-таблицы.

Оптимальные значения переменных будут оставаться неизменными при значениях δ_1, удовлетворяющих условию неположительности (задача минимизации) всех коэффициентов при небазисных переменных в F-уравнении. Таким образом должно выполняться следующее неравенство:

$-0,05 + \delta_1 \le 0 \Rightarrow \delta_1 \le 0,05$.

Следовательно, при неограниченном уменьшении коэффициента при x_1 в целевой функции или при увеличении его не более, чем на 0,05(т.е. до 2,55), оптимальные значения переменных останутся неизменными, а оптимальное значение F изменится в соответствии с выражением $18225 + 2000\delta_1$.

2)Предположим, что затраты на производство 2-го химиката изменятся до $1,75+\delta_2$, где δ_2 может принимать как положительное, так и отрицательное значение. Целевая функция в этом случае имеет вид:
$F = 2,5\, x_1 + (1,75 + \delta_2)x_2 + 2,9x_3 + 2,8z_1 + 2,5z_2 + 3,25z_3$.

Последняя строка в последней симплекс-таблице имеет вид:

	Решение	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	z_1	z_2	z_3
F	$18225 + (5500/3)\delta_2$	0	0	$-0,025+0,5\delta_2$	0	$-12,5+50/3\delta_2$	$-0,05-1/3\delta_2$	0	0

Коэффициенты при δ_2 равны коэффициентам при соответствующих переменных в строке x_2 последней симплекс-таблицы.

Оптимальные значения переменных будут оставаться неизменными при значениях δ_2, удовлетворяющих условию неположительности всех коэффициентов при небазисных переменных в F-уравнении. Таким образом должны выполняться следующие неравенства:

$-0,025+0,5\delta_2 \le 0 \Rightarrow \delta_2 \le 0,05$;

$-12{,}5+50/3\delta_2 \le 0 \Rightarrow \delta_2 \le 0{,}75$;

$-0{,}05 - 1/3\delta_2 \le 0 \Rightarrow \delta_2 \ge -0{,}15$.

Следовательно, при уменьшении коэффициента при x_2 в целевой функции не более, чем на 0,15(т.е. до 1,6) или при увеличении его не более, чем на 0,05(т.е. до 1,8), оптимальные значения переменных останутся неизменными, а оптимальное значение F изменится в соответствии с выражением 18225 +(5500/3)δ_2.

3) Предположим, что затраты на закупку 2-го химиката изменятся до 2,5+δ_3. Целевая функция в этом случае имеет вид:
$F = 2{,}5\,x_1 + 1{,}75x_2 + 2{,}9x_3 + 2{,}8z_1 + (2{,}5+\delta_3)z_2 + 3{,}25z_3$.
Последняя строка в последней симплекс-таблице имеет вид:

	Решение	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	z_1	z_2	z_3
F	18225+5000/3 δ_3	0	0	-0,025-0,5δ_3	0	-12,5-50/3δ_3	-0,05+1/3δ_3	0+ δ_3	0

Коэффициенты при δ_3 равны коэффициентам при соответствующих переменных в строке z_2 в последней симплекс-таблице.

Оптимальные значения переменных будут оставаться неизменными при значениях δ_3, удовлетворяющих условию неположительности всех коэффициентов при небазисных переменных в F-уравнении. Таким образом должны выполняться следующие неравенства:

$-0{,}025-0{,}5\delta_3 \le 0 \Rightarrow \delta_3 \ge -0{,}05$;

$-12{,}5-50/3\delta_3 \le 0 \Rightarrow \delta_3 \ge -0{,}75$;

$-0{,}05+1/3\delta_3 \le 0 \Rightarrow \delta_2 \le 0{,}15$;

$\delta_3 \le 0$.

Следовательно, при уменьшении коэффициента при z_2 в целевой функции не более, чем на 0,05(т.е. до 2,45) или при увеличении его не более, чем на 0,15(т.е. до 2,65), оптимальные значения переменных останутся неизменными, а оптимальное значение F изменится в соответствии с выражением 18225 + (5000/3)δ_3.

4) Предположим, что затраты на закупку 3-го химиката изменятся до 3,25+δ_4. Целевая функция в этом случае имеет вид:
F =2,5 x_1+ 1,75x_2 +2,9x_3 + 2,8z_1 + 2,5z_2 + (3,25+ δ_4)z_3.
Последняя строка в последней симплекс-таблице имеет вид:

	Решение	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	z_1	z_2	z_3
F	18225+1800δ_4	0	0	-0,025+δ_4	0	-12,5	-0,05	0	0+ δ_4

Коэффициенты при δ_4 равны коэффициентам при соответствующих переменных в строке z_3 в последней симплекс-таблице.

Оптимальные значения переменных будут оставаться неизменными при значениях δ_4, удовлетворяющих условию неположительности всех коэффициентов при небазисных переменных в F-уравнении. Таким образом должны выполняться следующие неравенства:

$-0{,}025+\delta_4 \le 0 \Rightarrow \delta_4 \le 0{,}025;$

$\delta_4 \le 0.$

Следовательно, при неограниченном уменьшении коэффициента при z_3 в целевой функции, оптимальные значения переменных останутся неизменными, а оптимальное значение F изменится в соответствии с выражением 18225 + 1800δ_4. Увеличивать коэффициент при z_3 в целевой функции нельзя.

5) Любое изменение коэффициента целевой функции при небазисной переменной в оптимальном решении приводит лишь к тому, что в заключительной симплекс-таблице в F-уравнении изменяется только коэффициент, соответствующий этой переменной. Причем коэффициент при небазисной переменной в результирующем F-уравнении нужно уменьшить на ту величину, на которую он увеличивается в исходном F-уравнении.