Методы оптимальных решений
Контрольная с решением

Задача 1

Составить математическую модель задачи и решить ее двумя способами: симплекс-методом и графически. Для полученной задачи составить двойственную, и проверить оптимальность плана исходной задачи с помощью критериев оптимальности планов двойственных задач.

Для кормления животных требуется составить суточный рацион, обладающий определенной питательностью, а именно он должен содержать не менее b_1 единиц микроэлементов, не менее b_2 кормовых единиц и не более b_3 единиц биостимуляторов. Вещества, входящие в рацион, не могут быть получены в чистом виде. Они содержатся в комбикормах двух видов I и II. Известно, что в одном килограмме комбикорма каждого вида содержится соответственно a_{ij} (i – 1, 2, 2; j = 1, 2) единиц каждого питательного вещества. Кроме того, известна себестоимость c_j (j = 1,2) одного килограмма комбикорма каждого вида.

Виды питательных веществ	Виды комбикормов		Норма питательных веществ
	I	II	
Микроэлементы	A_{11} - 3	A_{12} - 1	B_1 – 5
Кормовые единицы	A_{21} - 1	A_{22} - 2	B_2 – 5
Биостимуляторы	A_{31} - 2	A_{32} - 7	B_3 – 35
Себестоимость	C_1 - 2	C_2 - 2	

Требуется определить, сколько килограмм комбикорма каждого вида нужно взять для составления суточного рациона, чтобы он удовлетворял условиям питательности и имел бы наименьшую себестоимость.

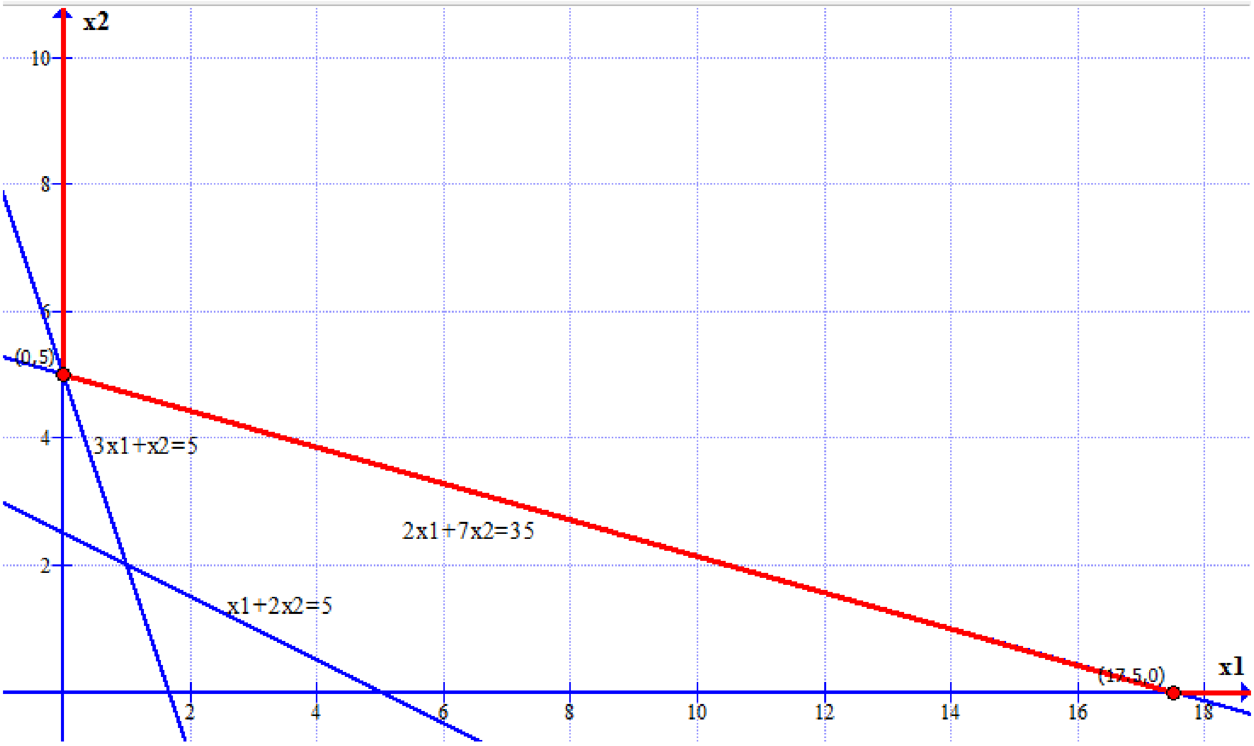
Решение.
Составляем модель задачи:

$$F = 2x_1 + 2x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1 + 2x_2 \geq 5 \\ 2x_1 + 7x_2 \geq 35 \end{cases}$$

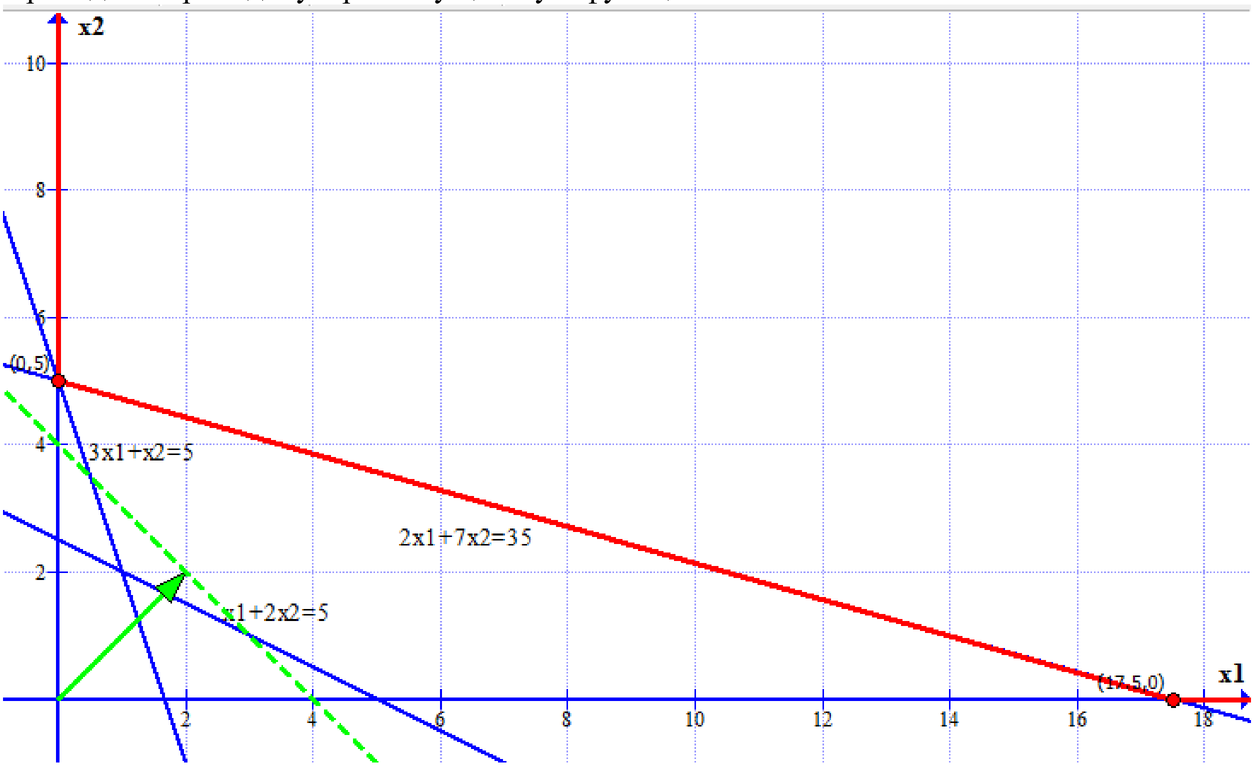
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Решаем задачу графически.
Находим область допустимых значений, построив линии ограничений.



Получаем ОДЗ, ограниченную снизу точками – (0,5) – (17.5,0).

Далее строим вектор целевой функции из начала координат в точку (2,2).
Проводим перпендикулярно ему целевую функцию.



Сдвигаем ее до крайнего касания ОДЗ.

Получаем оптимальное решение:
x1 = 0 – количество комбикорма 1 вида
x2 = 5 – количество комбикорма 2 вида
Минимальная себестоимость:
$F = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 5 = 10$

Далее решаем задачу симплекс-методом.

Для построения первого опорного плана систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных переменных.

$3x_1 + 1x_2 - 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 5$
$1x_1 + 2x_2 + 0x_3 - 1x_4 + 0x_5 = 5$
$2x_1 + 7x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 1x_5 = 35$

Умножим все строки на (-1) и будем искать первоначальный опорный план.

$-3x_1 - 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = -5$
$-1x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = -5$
$-2x_1 - 7x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = -35$

Решим систему уравнений относительно базисных переменных: x_3, x_4, x_5

Полагая, что свободные переменные равны 0, получим первый опорный план:
X1 = (0,0,-5,-5,-35)

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	-5	-3	-1	1	0	0
x_4	-5	-1	-2	0	1	0
x_5	-35	-2	-7	0	0	1
F(X0)	0	2	2	0	0	0

Среди отрицательных значений базисных переменных выбираем наибольший по модулю.

Ведущей будет 3-ая строка, а переменную x_5 следует вывести из базиса.

Минимальное значение θ соответствует 2-му столбцу, т.е. переменную x_2 необходимо ввести в базис.

На пересечении ведущих строки и столбца находится разрешающий элемент (РЭ), равный (-7).

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	-5	-3	-1	1	0	0
x_4	-5	-1	-2	0	1	0
x_5	-35	-2	**-7**	0	0	1
F(X0)	0	2	**2**	0	0	0
θ	0	$\frac{2}{-2} = -1$	$\frac{2}{-7} = -0.29$	-	-	-

Выполняем преобразования симплексной таблицы.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	0	-2,71	0	1	0	-0,14
x_4	5	-0,43	0	0	1	-0,29
x_2	5	0,29	1	0	0	-0,14
F(X0)	-10	1,43	0	0	0	0,29

В базисном столбце все элементы положительные.

Переходим к основному алгоритму симплекс-метода.

Среди значений индексной строки нет отрицательных. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи.

Оптимальный план:

$x_2 = 5$ – количество комбикорма 2 вида, комбикорм 1 вида не закупаем

F = 10 - минимальная себестоимость

Составляем двойственную задачу:

$$F = 2x_1 + 2x_2 \to \min \qquad\qquad F = 5y_1 + 5y_2 + 35y_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 5 \\ x_1 + 2x_2 \ge 5 \\ 2x_1 + 7x_2 \ge 35 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} 3y_1 + y_2 + 2y_3 \le 2 \\ y_1 + 2y_2 + 7y_3 \le 2 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \qquad\qquad y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

Оптимальное решение двойственной задачи находим из последней симплекс таблицы:

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	0	-2,71	0	1	0	-0,14
x_4	5	-0,43	0	0	1	-0,29
x_2	5	0,29	1	0	0	-0,14
F(X0)	-10	1,43	0	0	0	0,29

$$F = 10$$

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0,29 \end{cases}$$

Двойственные оценки показывают снижение себестоимости при снижении норм питательных веществ.

Так при снижении нормы по микроэлементам на 1 ед., себестоимость не снижается.

При снижении нормы по кормовым единицам на 1 ед., себестоимость не снижается.

При снижении нормы по биостимуляторам на 1 ед., себестоимость снижается на 0,29 ед.

Задача 2

Решить транспортную задачу. Заданы мощности поставщиков a_i (i = 1, 2, 3), емкости потребителей b_j (j = 1,2,3) и матрица $(c_{ij})_{i=1,2,3,j=1,2,3}$ стоимостей перевозок единицы продукции от каждого поставщика каждому потребителю. Требуется найти план перевозок, при котором суммарные транспортные затраты будут наименьшими.

a_i \ b_j	21	30	32
16	5	9	7
32	4	6	5
30	3	5	4

Решение.

Проверим баланс задачи.
∑a = 16 + 32 + 30 = 78
∑b = 21 + 30 + 32 = 83
Как видно, суммарная емкость потребителей превышает мощности поставщиков. Следовательно, модель исходной транспортной задачи является открытой. Чтобы получить закрытую модель, введем дополнительного (фиктивного) поставщика с мощностью 5 (83-78).
Тарифы перевозки единицы груза из базы во все магазины полагаем равны нулю.

	b1	b2	b3	Мощности
a1	5	8	7	16
a2	4	6	5	32
a3	3	5	4	30
a4	0	0	0	5
Емкости	21	30	32	

Используя **метод наименьшей стоимости**, построим первый опорный план транспортной задачи.

	b1	b2	b3	Мощности
a1	5	8[16]	7	16
a2	4	6[9]	5[23]	32
a3	3[21]	5	4[9]	30
a4	0	0[5]	0	5
Емкости	21	30	32	

Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 6, а должно быть m + n - 1 = 6.

Следовательно, опорный план является *невырожденным*.

Значение целевой функции для этого опорного плана равно:

F = 8*16 + 6*9 + 5*23 + 3*21 + 4*9 + 0*5 = 396

Проверим оптимальность опорного плана.

Найдем *потенциалы* u_i, v_j. по занятым клеткам таблицы, в которых $u_i + v_j = c_{ij}$, полагая, что $u_1 = 0$.

$u_1 + v_2 = 8; 0 + v_2 = 8; v_2 = 8$

$u_2 + v_2 = 6; 8 + u_2 = 6; u_2 = -2$

$u_2 + v_3 = 5; -2 + v_3 = 5; v_3 = 7$

$u_3 + v_3 = 4; 7 + u_3 = 4; u_3 = -3$

$u_3 + v_1 = 3; -3 + v_1 = 3; v_1 = 6$

$u_4 + v_2 = 0; 8 + u_4 = 0; u_4 = -8$

	v_1=6	v_2=8	v_3=7
u_1=0	5	8[16]	7
u_2=-2	4	6[9]	5[23]
u_3=-3	3[21]	5	4[9]
u_4=-8	0	0[5]	0

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых $u_i + v_j > c_{ij}$

(1;1): $0 + 6 > 5; \Delta_{11} = 0 + 6 - 5 = 1$

Производим пересчет.

Для этого в перспективную клетку (1;1) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

	b1	b2	b3	Мощности
a1	5[+]	8[16][-]	7	16
a2	4	6[9][+]	5[23][-]	32
a3	3[21][-]	5	4[9][+]	30
a4	0	0[5]	0	5
Емкости	21	30	32	

Из грузов x_{ij} стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (1, 2) = 16. Прибавляем 16 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 16 из X_{ij}, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

	b1	b2	b3	Мощности
a1	5[16]	8	7	16
a2	4	6[25]	5[7]	32
a3	3[5]	5	4[25]	30
a4	0	0[5]	0	5
Емкости	21	30	32	

Проверим оптимальность опорного плана.

Найдем *потенциалы* u_i, v_j. по занятым клеткам таблицы, в которых $u_i + v_j = c_{ij}$, полагая, что $u_1 = 0$.

$u_1 + v_1 = 5; 0 + v_1 = 5; v_1 = 5$
$u_3 + v_1 = 3; 5 + u_3 = 3; u_3 = -2$
$u_3 + v_3 = 4; -2 + v_3 = 4; v_3 = 6$
$u_2 + v_3 = 5; 6 + u_2 = 5; u_2 = -1$
$u_2 + v_2 = 6; -1 + v_2 = 6; v_2 = 7$
$u_4 + v_2 = 0; 7 + u_4 = 0; u_4 = -7$

	v_1=5	v_2=7	v_3=6
u_1=0	5[16]	8	7
u_2=-1	4	6[25]	5[7]
u_3=-2	3[5]	5	4[25]
u_4=-7	0	0[5]	0

Опорный план является оптимальным, так все оценки свободных клеток удовлетворяют условию $u_i + v_j \le c_{ij}$.

План перевозки.

	b1	b2	b3	Мощности
a1	5[16]			16
a2		6[25]	5[7]	32
a3	3[5]		4[25]	30
a4		0[5]		5
Емкости	21	30	32	

Минимальные затраты составят: F = 5*16 + 6*25 + 5*7 + 3*5 + 4*25 + 0*5 = 380
Потребность 2-го потребителя остается неудовлетворенной на 5 ед.

Задача 3

Найти оптимальные стратегии и цену игры, заданной платежной матрицей А. Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение.
Проверяем, имеет ли платежная матрица седловую точку.

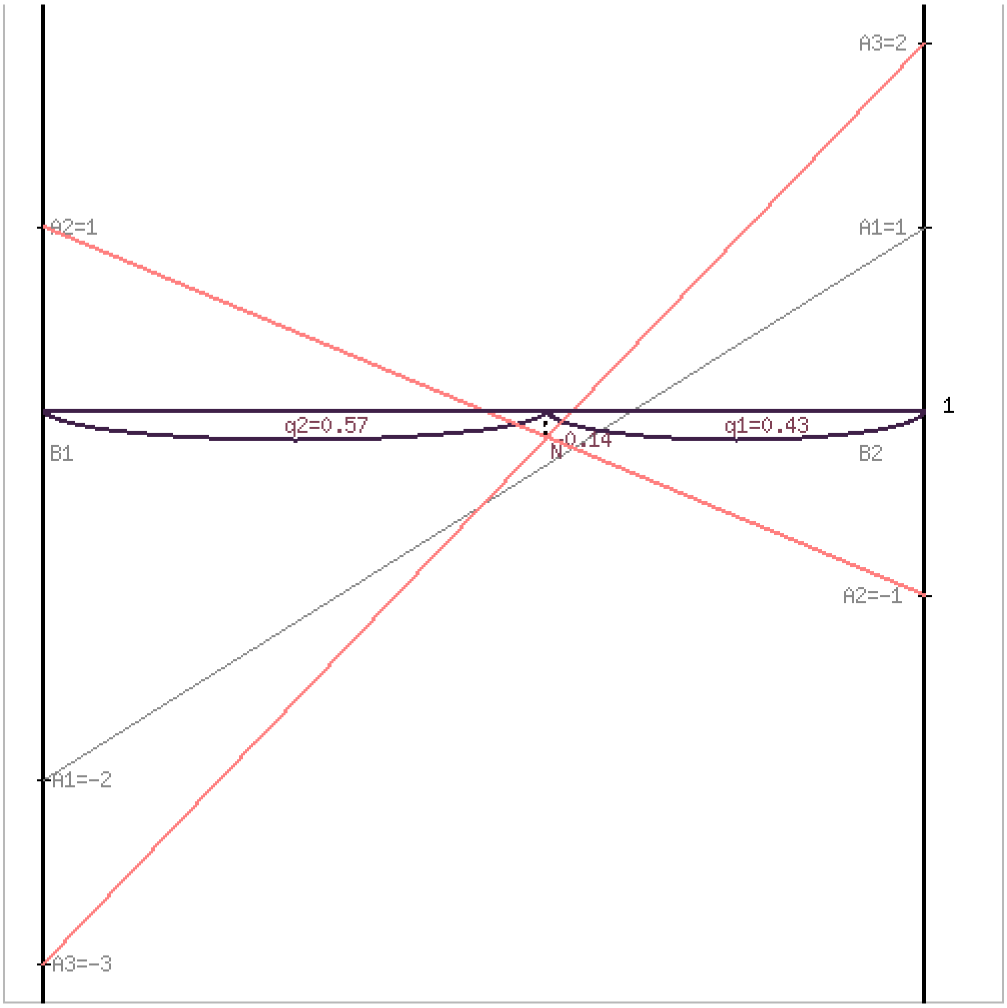
Игроки	B_1	B_2	B_3	B_4	a = min(A_i)
A_1	3	-2	1	5	-2
A_2	0	1	-1	-1	-1
A_3	3	-3	2	3	-3
b = max(B_i)	3	1	2	5	

Нижняя ценой игры a = max(a_i) = -1.
Верхняя цена игры b = min(b_j) = 1.
Что свидетельствует об отсутствии седловой точки, так как a ≠ b, тогда цена игры находится в пределах -1 ≤ y ≤ 1.

Находим решение игры в смешанных стратегиях.
Сначала производим поиск доминирующих стратегий.
С позиции 2 игрока:
С позиции проигрышей игрока B стратегия B_3 доминирует над стратегией B_1 (все элементы столбца 3 меньше элементов столбца 1), следовательно исключаем 1-й столбец матрицы. Вероятность $q_1 = 0$.
С позиции проигрышей игрока B стратегия B_3 доминирует над стратегией B_4 (все элементы столбца 3 меньше элементов столбца 4), следовательно исключаем 4-й столбец матрицы. Вероятность $q_4 = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Мы свели игру 3 x 4 к игре 3 x 2.
Решим задачу геометрическим методом, который включает в себя следующие этапы:
По оси абсцисс откладывается отрезок, длина которого равна 1. Левый конец отрезка (точка x = 0) соответствует стратегии B_1, правый - стратегии B_2 (x = 1). Промежуточные точки x соответствуют вероятностям некоторых смешанных стратегий $S_1 = (p_1,p_2)$.



На левой оси ординат откладываются выигрыши стратегии B_1. На линии, параллельной оси ординат, из точки 1 откладываются выигрыши стратегии B_2.
Максиминной оптимальной стратегии игрока В соответствует точка N, лежащая на пересечении прямых A_2A_2 и A_3A_3, для которых можно записать следующую систему уравнений:
$y = 1 + (-1 - 1)q_2$
$y = -3 + (2 - (-3))q_2$
Откуда
$q_1 = {}^{3}/_{7}$
$q_2 = {}^{4}/_{7}$
Цена игры, $y = {}^{-1}/_{7}$
Теперь можно найти минимаксную стратегию игрока А.
$p_2-3p_3 = y$
$-p_2+2p_3 = y$
$p_2+p_3 = 1$
или
$p_2-3p_3 = {}^{-1}/_{7}$
$-p_2+2p_3 = {}^{-1}/_{7}$
$p_2+p_3 = 1$
Решая эту систему, находим:
$p_2 = {}^{5}/_{7}$.
$p_3 = {}^{2}/_{7}$.