МИРЭА

Типовой расчет «Алгебра и геометрия»

Вариант 8

Задача 1. Для пирамиды с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 найти:

В) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$,

Е) уравнение высоты, опущенной из точки A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

$A_1(2,-1,2),\ \ A_2(1,2,-1),\ \ A_3(3,2,1),\ \ A_4(-4,2,5)$.

Решение.

В) Уравнение плоскости, проходящей через три точки A_1, A_2, A_3 имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Подставляем координаты точек и получаем:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-2 \\ 1-2 & 2+1 & -1-2 \\ 3-2 & 2+1 & 1-2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-2 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=$$
$$=(x-2)\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}-(y+1)\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+(z-2)\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=$$
$$=6(x-2)-4(y+1)-6(z-2)=0,$$

$$3(x-2)-2(y+1)-3(z-2)=0,$$
$$3x-2y-3z-6-2+6=0,$$
$$3x-2y-3z-2=0.$$

E) Найдем уравнение высоты, опущенной из точки A_4 на грань $A_1A_2A_3$. В качестве направляющего вектора высоты можно выбрать вектор нормали к плоскости $A_1A_2A_3$, то есть $\bar{n}=\{3,-2,-3\}$. Получаем уравнения высоты:

$$\frac{x-x_4}{3}=\frac{y-y_4}{-2}=\frac{z-z_4}{-3},$$

$$\frac{x+4}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-5}{-3}$$

Задача 2. Найти все комплексные корни заданного уравнения. Отметить найденные кори на комплексной плоскости $z^4-\sqrt{2}z^2+2=0$.

Решение. Решим данное биквадратное уравнение. Сделаем замену $z^2=t$ и получим:

$$t^2-\sqrt{2}t+2=0,$$
$$D=2-4\cdot 2=-6,$$
$$t_1=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+i\sqrt{3}\right),$$
$$t_2=\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{6}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-i\sqrt{3}\right).$$

Получаем еще два квадратных уравнения:

$$z^2=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+i\sqrt{3}\right),$$
$$z^2=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-i\sqrt{3}\right).$$

Решаем каждое из них, находя корни по формуле Муавра-Лапласа.

А) $z^2=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+i\sqrt{3}\right)$. Обозначим $w=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+i\sqrt{3}\right)$. Найдем представление этого комплексного числа в тригонометрической форме.

Модуль $|w|=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}=\sqrt{2}$, то есть $w=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Аргумент $\varphi:\begin{cases}\cos\varphi=1/2,\\ \sin\varphi=\sqrt{3}/2.\end{cases}\Rightarrow\ \varphi=\pi/3$.

Получаем, что $w=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Найдем корни $z_{0,1}=\sqrt{w}$:

$$z_0=\sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right),$$

$$z_1=\sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi/3+2\pi}{2}+i\sin\frac{\pi/3+2\pi}{2}\right)=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=\sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$

Б) $z^2=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-i\sqrt{3}\right)$. Обозначим $\omega=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-i\sqrt{3}\right)$. Найдем представление этого комплексного числа в тригонометрической форме.

Модуль $|\omega| = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = \sqrt{2}$, то есть $\omega = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Аргумент $\varphi : \begin{cases} \cos\varphi = 1/2, \\ \sin\varphi = -\sqrt{3}/2. \end{cases} \Rightarrow \varphi = -\pi/3$.

Получаем, что $\omega = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Найдем корни $z_{2,3} = \sqrt{\omega}$:

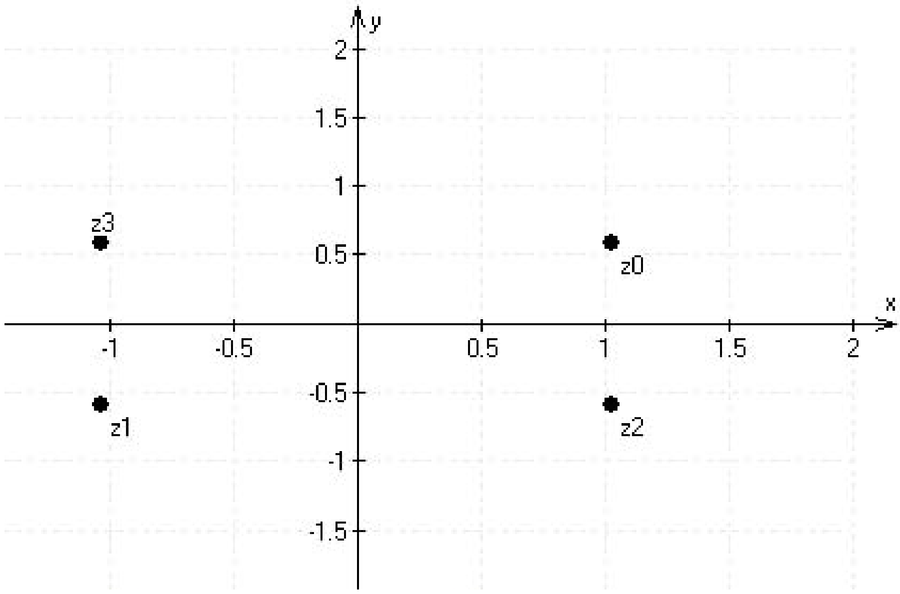
$$z_2 = \sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right),$$

$$z_3 = \sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{-\pi/3+2\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi/3+2\pi}{2}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

Корни найдены. Чтобы отметить их на комплексной плоскости, вычислим приближенные значения:

$$z_0 = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \approx 1,03 + 0,59i, \quad z_1 = \sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \approx -1,03 - 0,59i$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \approx 1,03 - 0,59i, \quad z_3 = \sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \approx -1,03 + 0,59i.$$



Задача 3. Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора, действующего в двумерном пространстве, если известна его матрица A в некотором базисе $\{e_1, e_2\}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

Решение. Найдем собственные значения, решив характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 5 & -6-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-6-\lambda) + 15 = -12 - 2\lambda + 6\lambda + \lambda^2 + 15 = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0,$$

Откуда $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -3$ - собственные значения.

Найдем соответствующие им собственные вектора.

Пусть $\lambda_1 = -1$. Получаем систему:

$\begin{cases} 3x-3y=0, \\ 5x-5y=0, \end{cases}$ $x=y$, поэтому собственный вектор $X_1=C_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Пусть $\lambda_2=-3$. Получаем систему:

$\begin{cases} 5x-3y=0, \\ 5x-3y=0, \end{cases}$ $x=\frac{3}{5}y$, поэтому собственный вектор $X_2=C_2\begin{pmatrix}3/5\\1\end{pmatrix}$.