Практическая работа по математике с решением

Тема «Исследование функций»

Построить графики функций:

Задача 1102. $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

Решение.

1) Область определения функции $x\neq \pm 2$, то есть $D(y)=(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$. Точки разрыва $x=2$ и $x=-2$. Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to -2-0}\frac{x^3}{x^2-4}=\frac{-8}{+0}=-\infty,\ \lim_{x\to -2+0}\frac{x^3}{x^2-4}=\frac{-8}{-0}=+\infty\ ,$$

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^3}{x^2-4}=\frac{8}{-0}=-\infty,\ \lim_{x\to 2+0}\frac{x^3}{x^2-4}=\frac{8}{+0}=+\infty\ .$$

Получаем, что $x=2$ и $x=-2$ - вертикальные асимптоты.

2) Точки пересечения с осями координат:

$Ox:\ y=\dfrac{x^3}{x^2-4}=0,\ x=0$, точка (0,0).

$Oy:\ x=0,\ \Rightarrow y=0$, точка (0,0).

3) Функция нечетная, так как

$$y(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-4}=-\frac{x^3}{x^2-4}=-y(x)$$

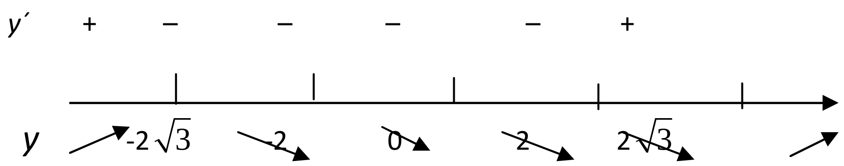
График симметричен относительно начала координат.

4) Экстремумы и монотонность. Вычисляем первую производную:

$$y'(x)=\left(\frac{x^3}{x^2-4}\right)'=\frac{3x^2\left(x^2-4\right)-x^3\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{3x^4-12x^2-2x^4}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{x^4-12x^2}{\left(x^2-4\right)^2}=$$

$$=\frac{x^2(x^2-12)}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{x^2(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})}{(x-2)^2(x+2)^2}.$$

Находим критические точки: $x=\pm 2\sqrt{3},\ x=0,\ x=\pm 2$. Исследуем знак производной на интервалах, на которые критическая точка делит область определения функции.



Функция возрастает на интервалах $(-\infty;-2\sqrt{3}),\ (2\sqrt{3};+\infty)$, убывает на интервалах $\left(-2\sqrt{3};-2\right),\ (-2;0),\ (0;2),\ \left(2;2\sqrt{3}\right)$. Функция имеет минимум при $x=2\sqrt{3}\approx 3,46$, $y(2\sqrt{3})=3\sqrt{3}=5,2$. Функция имеет максимум при $x=-2\sqrt{3}\approx -3,46$, $y(-2\sqrt{3})=-3\sqrt{3}=-5,2$.

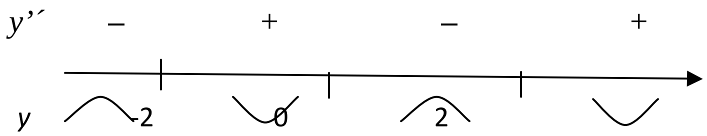
5) Выпуклость и точки перегиба. Вычисляем вторую производную.

$$y''(x)=\left(\frac{x^4-12x^2}{\left(x^2-4\right)^2}\right)'=\frac{\left(4x^3-24x\right)\left(x^2-4\right)^2-\left(x^4-12x^2\right)2x2\left(x^2-4\right)}{\left(x^2-4\right)^4}=$$

$$=4x\frac{\left(x^2-6\right)\left(x^2-4\right)-\left(x^4-12x^2\right)}{\left(x^2-4\right)^3}=4x\frac{x^4-6x^2-4x^2+24-x^4+12x^2}{\left(x^2-4\right)^3}=8x\frac{12+x^2}{\left(x^2-4\right)^3}.$$

Приравниваем к нулю и находим критические точки: $x=0,\ x=2,\ x=-2$.

Исследуем знак производной на интервалах, на которые критические точки делят области определения функции.



Функция выпукла вверх на интервалах $(-\infty;-2)$, $(0;2)$, выпукла вниз на интервалах $(-2;0)$, $(2;+\infty)$. Точка перегиба: $x=0$, $f(0)=0$.

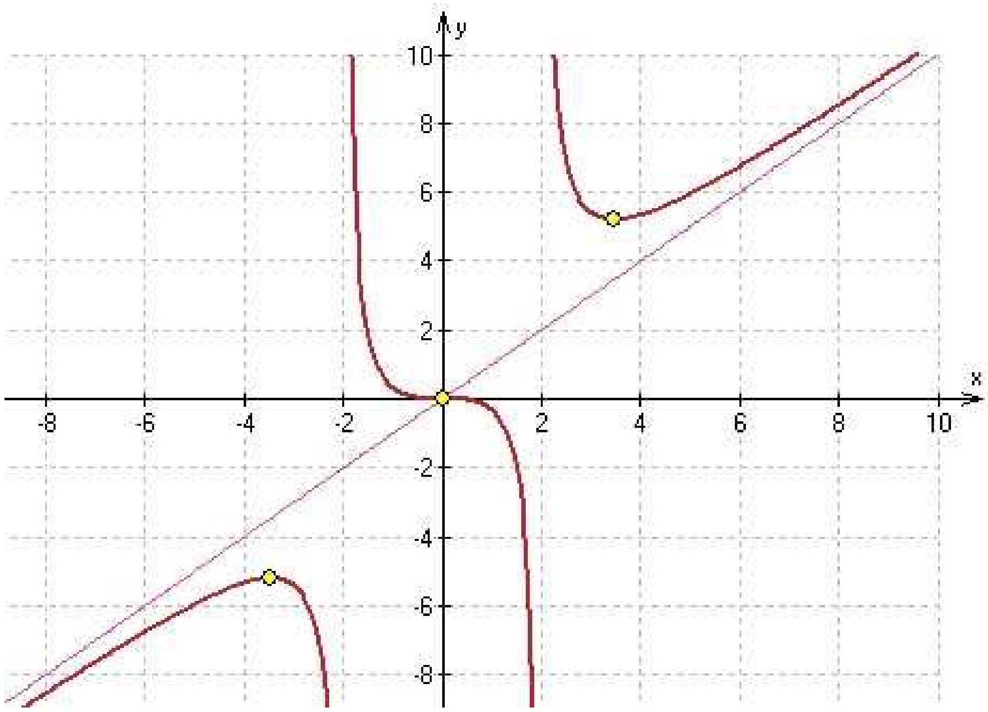
6) Наклонные асимптоты вида $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x^2-4)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-4/x^2}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{(x^2-4)}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+4x}{(x^2-4)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{(x^2-4)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{(x-4/x)}=0.$$

Наклонная асимптота $y=x$.

7) Строим график функции и асимптоту, отмечая ключевые точки:



Задача 1103. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Решение.

А) Исследование функции

1) Область определения – числовая полупрямая, $D(y) = (0; +\infty)$. Точек разрыва нет. Исследуем предел справа в граничной точке:

$$\lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+0} \frac{1/x}{1/2\sqrt{x}} = \lim_{x\to+0} \frac{2}{\sqrt{x}} = \infty$$

Вертикальная односторонняя асимптота $x=0$.

2) Точки пересечения с осями координат:

Ox: $y(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$, $x=1$, точка (1,0).

Oy: $x=0\notin D(y)$.

3) Функция общего вида, так как область определения – полупрямая.

4) Экстремумы и монотонность. Вычисляем первую производную:

$$y'=\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{\frac{1}{x}\sqrt{x}-\ln x\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$$

Находим критические точки (производная равна нулю или не существует): $x=0$, $x=e^2\approx 7,4$.

Исследуем знак производной на интервалах, на которые критические точки делят области определения функции.

y' +   –

y 0   ↗   7,4   ↘

Функция убывает на интервале $(e^2;+\infty)$, возрастает на интервале $(0;e^2)$. Функция имеет максимум при $x=e^2$, $f(e^2)=\dfrac{2}{e}\approx 0,74$.

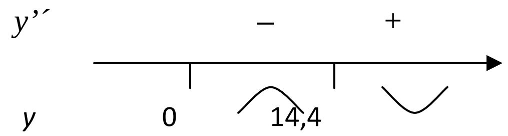
5) Выпуклость и точки перегиба. Вычисляем вторую производную:

$$y''=\left(\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}\right)'=\frac{-\frac{1}{x}x\sqrt{x}-(2-\ln x)\frac{3}{2}\sqrt{x}}{2\left(x\sqrt{x}\right)^2}=\frac{-2\sqrt{x}-(2-\ln x)3\sqrt{x}}{4\left(x\sqrt{x}\right)^2}=$$

$$=\frac{-2\sqrt{x}-6\sqrt{x}+3\sqrt{x}\ln x}{4\left(x\sqrt{x}\right)^2}=\frac{-8+3\ln x}{4x^{5/2}}.$$

Находим критические точки (производная равна нулю или не существует): $x=0$, $x=e^{8/3}\approx 14,4$.

Исследуем знак производной на интервалах, на которые критические точки делят области определения функции.



Функция выпукла вниз на интервале $(14,4;+\infty)$, выпукла вверх на $(0;14,4)$. Точка перегиба $x=e^{8/3}$, $y\left(e^{8/3}\right)\approx 0,7$

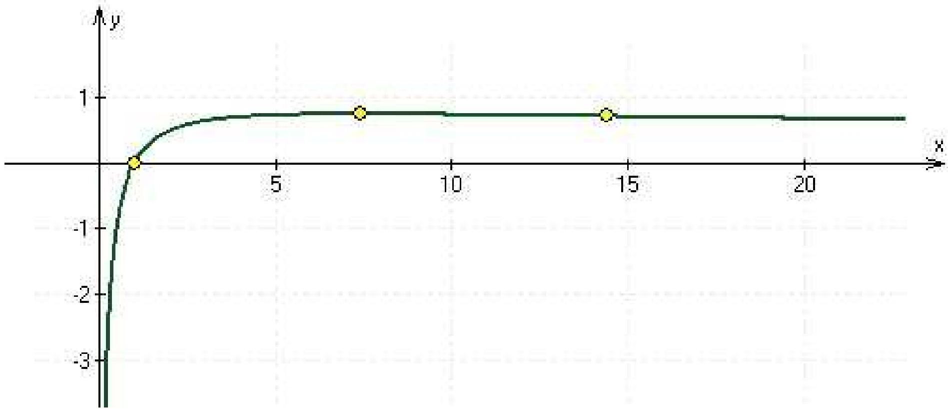
6) Найдем наклонные асимптоты вида $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{3x\sqrt{x}}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}=0$$

Горизонтальная асимптота $y=0$.

7) Строим график и отмечаем ключевые точки:



Задача 1105. $y=(x-1)\sqrt{x}$

Решение.

1) Область определения $D(y)=[0;+\infty)$.

2) Точек разрыва нет.

3) Функция общего вида, так как область определения – полупрямая.

4) Точки пересечения графика функции с осями координат

Ox. $y=(x-1)\sqrt{x}=0$, $x_1=0, x_2=1$, точки (0,0), (1,0).

Oy. $x=0 \Rightarrow y=0$, точка (0,0).

5) Вертикальная асимптота отсутствует.

Найдем наклонные асимптоты вида $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}-1/\sqrt{x}}{1}=\infty$$

Наклонных асимптот нет.

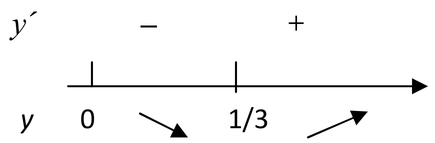
6) Экстремумы и промежутки монотонности функции.

Вычисляем первую производную:

$$y'=\sqrt{x}+(x-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}\left(1+\frac{x-1}{2x}\right)=\sqrt{x}\left(\frac{2x+x-1}{2x}\right)=\frac{3(x-1/3)}{2\sqrt{x}}=0.$$

Критические точки: $x_1=0, x_2=1/3$.

Исследуем знак производной на интервалах, на которые критические точки делят области определения функции.



Функция убывает на интервале $(0;1/3)$, возрастает на интервале $(1/3;+\infty)$. Функция Функция $y(x)$ имеет минимум при $x=1/3$, $y(1/3)=-\frac{2}{9}\sqrt{3}\approx -0,38$.

7) Точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости.

Вычисляем вторую производную:

$$y''=\frac{3}{2}\frac{1\sqrt{x}-(x-1/3)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}=\frac{3}{2}\frac{1}{x}\sqrt{x}\left(1-\frac{x-1/3}{2x}\right)=\frac{3}{2\sqrt{x}}\frac{x+1/3}{2x}=\frac{3x+1}{4x^{3/2}}>0 \text{ на } (0;+\infty)$$

Функция выпукла вниз на всей области определения, точек перегиба нет.

8) Строим график функции