Расчетная работа

Теория вероятностей

Задача 04. На экзамен по математике явилось $N=12$ студентов. Из них $K=6$ не знает ровным счетом ничего. Весьма доброжелательно настроенный преподаватель решил ставить положительную оценку всякому, кто знает хоть что-то. Он успел опросить $L=5$ студентов. Найти вероятность следующих событий:

A – (ровно $M=3$ студента из $L=5$ опрошенных получит неудовлетворительную оценку); B – (преподавателю удалось поставить положительную оценку хотя бы одному из опрошенных).

Решение.

Пусть событие A – ровно $M=3$ студента из $L=5$ опрошенных получит неудовлетворительную оценку.

Общее число всех случаев, которыми можно выбрать 5 студентов из 12, явившихся на экзамен, есть $n=C_{12}^5$. Найдем число способов, которыми можно выбрать троих студентов из 6 студентов, которые не готовились к экзамену и ничего не знают по предмету, т.е. C_6^3. Кроме того, учтем число комбинаций, которыми можно выбрать $5-3=2$ студентов из $12-6=6$ студентов, которые готовились к экзамену, таких комбинаций C_6^2. По правилу произведения общее число случаев благоприятствующих событию A, равно $m=C_6^3\cdot C_6^2$. Итак, по классической формуле вероятностей

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_6^3\cdot C_6^2}{C_{12}^5}=\frac{\frac{6!}{3!\cdot 3!}\cdot\frac{6!}{2!\cdot 4!}}{\frac{12!}{5!\cdot 7!}}=\frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{3!\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{4!\cdot 5\cdot 6}{4!\cdot 2}\frac{7!\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}=$$

$$=\frac{4\cdot 5\cdot 5\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 11\cdot 12}=\frac{5\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 11}=\frac{25}{66}\approx 0{,}3788.$$

Пусть событие B – преподавателю удалось поставить положительную оценку хотя бы одному из опрошенных, т.е. или один студент сдал экзамен, или два студента, или трое студентов, или четверо студентов, или пятеро студентов. Для события B противоположным является событие $\overline{B}$ – среди опрошенных ни один студент не готовился к экзамену и ничего не знает. Тогда

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}).$$

Вычислим вероятность события $\overline{B}$. Общее число всех случаев, которыми можно выбрать 5 студентов из 12, явившихся на экзамен, есть $n = C_{12}^5$. Найдем число способов, которыми можно выбрать всех пятерых студентов из 12 – 6 = 6 студентов, не готовившихся к экзамену, т.е. C_6^5. Тогда общее число случаев благоприятствующих событию $\overline{B}$, равно $m = C_6^5$. Итак,

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{m}{n} = 1 - \frac{C_6^5}{C_{12}^5} = 1 - \frac{6}{\frac{12!}{5!\cdot 7!}} = 1 - \frac{6}{\frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{7!\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}} =$$

$$= 1 - \frac{6}{3\cdot 2\cdot 11\cdot 12} = 1 - \frac{1}{132} = \frac{131}{132} \approx 0{,}9924.$$

Ответ: $P(A) = \frac{25}{66}$; $P(B) = \frac{131}{132}$

Задача 17. Для получения кредита предприятие обратилось к трем банкам. Статистика свидетельствует, что вероятности выделения кредита этими банками оценивается следующим образом: для первого банка $p_1 = \frac{1}{8}$, для второго банка $p_2 = \frac{1}{10}$ и для третьего банка $p_3 = \frac{1}{12}$. Банки выделяют кредит независимо друг от друга и, если примут решение о его выделении, то в размере: первый банк – $L = 15$ млн. руб., второй банк – $M = 15$ млн. руб. и третий – $N = 30$ млн. руб.

Рассмотрим следующие события: A – (первый банк выделил кредит);

B = (второй банк выделил кредит);

C = (третий банк выделил кредит).

Интересы предприятия, обратившегося за кредитом, описываются некоторыми D – (кредит получен в размере 30 млн.руб.) и E – (кредит получен в размере не менее 45 млн.руб.). Выразите эта события через события A. B и С, и найдите их вероятности.

Решение.

Задано, что события A, B, C – получение кредита в 1-ом, 2-ом и 3-ем банках соответственно. Тогда по условию $P(A)=p_1=\frac{1}{8}$, $P(B)=p_2=\frac{1}{10}$, $P(C)=p_3=\frac{1}{12}$.

Поскольку банки работают независимо друг от друга (события A, B, C – независимы), то предприятие может получить кредиты как в одном банке, так и в нескольких одновременно. Выразим событие D – (кредит получен в размере 30 млн.руб.) через события A, B, C:

$$D = AB\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C ,$$

что означает, что кредит выдали либо первый и второй банки (15 + 15 = 30 млн.руб.), либо третий банк (30 млн.руб.).

Тогда вероятность события D:

$$P(D)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(\overline{C})+P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})\cdot P(C)=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{10}\cdot\left(1-\frac{1}{12}\right)+\left(1-\frac{1}{8}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{10}\right)\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{11}{12}+\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{12}=$$

$$=\frac{11+63}{8\cdot10\cdot12}=\frac{74}{8\cdot10\cdot12}=\frac{37}{4\cdot10\cdot12}=\frac{37}{480}\approx 0{,}0771.$$

Выразим событие E – (кредит получен в размере не менее 45 млн.руб.) через события A, B, C:

$$E = A\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC ,$$

что означает, что кредит выдали либо первый и третий банки (15 + 30 = 45 млн.руб.), либо второй и третий банки (15 + 30 = 45 млн.руб.), либо все три банка (15 + 15 + 30 = 60 млн.руб.).

Тогда вероятность события E:

$$P(E) = P(A)\cdot P(\overline{B})\cdot P(C) + P(\overline{A})\cdot P(B)\cdot P(C) + P(A)\cdot P(B)\cdot P(C) =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\left(1-\frac{1}{10}\right)\cdot\frac{1}{12} + \left(1-\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{12} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{8}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{12} + \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{12} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{12} =$$

$$= \frac{9+7+1}{8\cdot 10\cdot 12} = \frac{17}{8\cdot 10\cdot 12} = \frac{17}{960} \approx 0{,}0177.$$

Ответ: $P(D) = \dfrac{37}{480}$; $P(E) = \dfrac{17}{960}$.

Задача 29. Торговая фирма располагает разветвленной сетью филиалов и есть основания считать, что ее суммарная дневная выручка X является нормально распределенной случайной величиной. Выявленные значения этой величины по 100 рабочим дням представлены в виде следующего интервального ряда:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$(x_{i-1};x_i)$	$(0;5)$	$(5;10)$	$(10;15)$	$(15;20)$	$(20;25)$	$(25;30)$	$(30;35)$	$(35;40)$
n_i	2	3	8	18	24	22	13	10

Требуется:

1. построить гистограмму относительных частот;

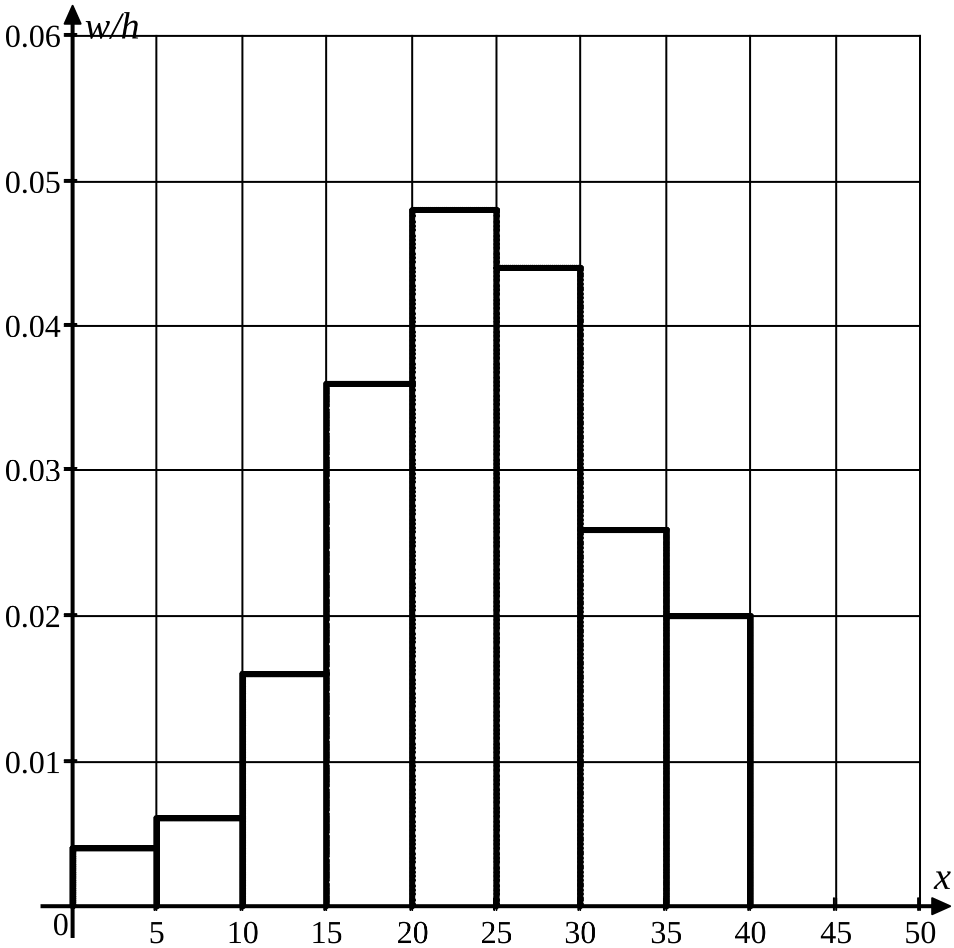
2. определить несмещенные оценки для неизвестных математического ожидания m_x и дисперсии $D_x = \sigma_x^2$ случайной величины X.

Решение.

1. Для того, чтобы построить гистограмму плотности относительных частот, найдем относительные частоты: $\omega_i = \dfrac{n_i}{n}$ и плотности относительных частот $\dfrac{\omega_i}{h}$. Вычисления выполним в таблице.

i	$(x_{i-1};x_i)$	n_i	$\omega_i=\frac{n_i}{n}$	$\frac{\omega_i}{h}\quad(h=5)$
1	$(0;5)$	2	$\frac{2}{100}=0{,}02$	$\frac{0{,}02}{5}=0{,}004$
2	$(5;10)$	3	$\frac{3}{100}=0{,}03$	$\frac{0{,}03}{5}=0{,}006$
3	$(10;15)$	8	$\frac{8}{100}=0{,}08$	$\frac{0{,}08}{5}=0{,}016$
4	$(15;20)$	18	$\frac{18}{100}=0{,}18$	$\frac{0{,}18}{5}=0{,}036$
5	$(20;25)$	24	$\frac{24}{100}=0{,}24$	$\frac{0{,}24}{5}=0{,}048$
6	$(25;30)$	22	$\frac{22}{100}=0{,}22$	$\frac{0{,}22}{5}=0{,}044$
7	$(30;35)$	13	$\frac{13}{100}=0{,}13$	$\frac{0{,}13}{5}=0{,}026$
8	$(35;40)$	10	$\frac{10}{100}=0{,}10$	$\frac{0{,}10}{5}=0{,}020$
		$n=\sum n_i=100$		

Строим на оси абсцисс частичные интервалы. Над этими интервалами проводим отрезки, параллельные оси абсцисс на высоте, соответствующей плотностям относительной частоты. Тогда гистограмма плотности относительных частот имеет вид:



2. Для определения точечных оценок находим середины интервалов и принимаем их в качестве вариант. Вычислим числовые характеристики интервального вариационного ряда. Для этого составим расчетную таблицу:

i	$(x_{i-1};x_i)$	Середины интервалов x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^2 n_i$
1	$(0;5)$	2,5	2	5	– 21,35	455,8225	911,6450
2	$(5;10)$	7,5	3	22,5	– 16,35	267,3225	801,9675
3	$(10;15)$	12,5	8	100	– 11,35	128,8225	1030,5800
4	$(15;20)$	17,5	18	315	– 6,35	40,3225	725,8050
5	$(20;25)$	22,5	24	540	– 1,35	1,8225	43,7400
6	$(25;30)$	27,5	22	605	3,65	13,3225	293,0950
7	$(30;35)$	32,5	13	422,5	8,65	74,8225	972,6925
8	$(35;40)$	37,5	10	375	13,65	186,3225	1863,2250
Σ			100	2385	–	–	6642,7500

Среднее арифметическое (выборочная средняя):

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i = \frac{2385}{100} = 23{,}85.$$

Выборочная дисперсия:

$$D_{â} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 \cdot n_i = \frac{6642{,}75}{100} = 66{,}4275.$$

Найдем несмещенные оценки для неизвестных математического ожидания m_x и дисперсии $D_x = \sigma_x^2$ случайной величины *X*.

Так как выборочная средняя является оценкой математического ожидания случайной величины и представляет собой несмещенную оценку генеральной средней m_x:

$$m_x = \bar{x} = 23{,}85.$$

Несмещенной оценкой генеральной дисперсии служит исправленная выборочная дисперсия D_x, которая определяется по формуле:

$$D_x = \frac{n}{n-1} D_{в} = \frac{100}{99} \cdot 66{,}4275 = 67{,}0985\ .$$