Пределы. Решение контрольной работы

Нахождение предела по определению

Задача 1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать N(ε))

$a_n = \dfrac{5n+4}{3n-5}$, $a = \dfrac{5}{3}$

Решение. Нужно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ будет выполнено $|a_n - a| < \varepsilon$. Получаем:

$$|a_n - a| = \left|\frac{5n+4}{3n-5} - \frac{5}{3}\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\frac{3(5n+4)-5(3n-5)}{(3n-5)3}\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\frac{15n+12-15n+25}{(3n-5)3}\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\frac{37}{(3n-5)3}\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\frac{1}{(3n-5)}\right| < \frac{3}{37}\varepsilon,$$

$$3n-5 > \frac{37}{3\varepsilon},$$

$$3n > \frac{37}{3\varepsilon} + 5,$$

$$n > \frac{37+15\varepsilon}{9\varepsilon},$$

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{37+15\varepsilon}{9\varepsilon}\right].$$

При $\forall n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$, следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n+4}{3n-5} = \dfrac{5}{3}$.

Задача 2. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

$a_n = \dfrac{3n^2+2}{4n^2-1}$, $a = \dfrac{3}{4}$.

Решение. Надо показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число N, что для всех $n > N$ выполняется условие $|a_n - a| < \varepsilon$.

Запишем этот модуль разности:

$$|a_n - a| = \left|\frac{3n^2+2}{4n^2-1} - \frac{3}{4}\right| = \left|\frac{12n^2+8-12n^2+3}{4(4n^2-1)}\right| = \left|\frac{11}{4(4n^2-1)}\right| = \frac{11}{4}\frac{1}{4n^2-1} < \varepsilon,$$

$$\frac{1}{4n^2-1} < \frac{4}{11}\varepsilon,$$

$$4n^2 - 1 > \frac{11}{4\varepsilon},$$

$$n^2 > \frac{1}{4}\left(\frac{11}{4\varepsilon}+1\right),$$

$$n > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11+4\varepsilon}{4\varepsilon}}.$$

Если выбрать $N = \left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11+4\varepsilon}{4\varepsilon}}\right] + 1$, то для любых $n > N$ искомое неравенство будет выполнено, что и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{4n^2-1} = \frac{3}{4}$

Первый замечательный предел

Задача 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 10x}{5\sin 5x \cdot \operatorname{tg} 2x}$

Решение. Преобразуем выражение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 10x}{5\sin 5x\cdot \operatorname{tg} 2x} = \left(\frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 5x}{5\sin 5x\cdot \operatorname{tg} 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 5x}{5\cdot \operatorname{tg} 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}\cos 2x =$$

Используем первый замечательный предел: $\frac{\sin t}{t} \to 1,\ t \to 0$

$$= \frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\frac{2x}{\sin 2x}\frac{5x}{2x}\cos 2x = \frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x}\cos 2x = \frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{5}{2}\cos 2x = \lim_{x\to 0}\cos 2x = 1.$$

Задача 4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\sin x}\right)$

Решение.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x-1}{\sin x}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=-\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)=-\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x}=-2\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\frac{x}{\sin x}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x}=$$

Используем первый замечательный предел: $\frac{\sin t}{t}\to1,\ t\to0$

$$=-2\lim_{x\to0}\frac{x^2/4}{x}=-2\lim_{x\to0}\frac{x}{4}=0.$$

Ответ: 0.

Второй замечательный предел

Задача 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x+1}{7x+4}\right)^{2-3x}$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x+1}{7x+4}\right)^{2-3x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x+4-3}{7x+4}\right)^{2-3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{7x+4}\right)^{2-3x}=\left(1^{-\infty}\right)=$$

Приводим к второму замечательному пределу $\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\to e,\ t\to\infty$.

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-3}{7x+4}\right)^{\frac{7x+4}{-3}}\right)^{\frac{-3}{7x+4}(2-3x)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-6+9x}{7x+4}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-6/x+9}{7+4/x}}=e^{9/7}.$$

Задача 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{5x}\right)^{4x}$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{5x}\right)^{4x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{4x}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{5x}\right)^{\frac{4}{5}}=$$

$$=\left|\text{т.к. } (1+1/t)^t\to e,\ t\to\infty\right|=\lim_{x\to\infty}(e)^{\frac{4}{5}}=e^{4/5}.$$

Задача 7. $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{x/3x-3}$

Решение.

$\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{x/3x-3}=\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}=\left(1^{\infty}\right)=$

Сведем к второму замечательному пределу $(1+t)^{1/t}\to e,\ t\to 0$.

Сделаем замену $t=x-1,\ x=t+1,\ t\to 0$

$$=\lim_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}=\lim_{t\to 0}(7-6t-6)^{\frac{t+1}{3t+3-3}}=\lim_{t\to 0}(1-6t)^{\frac{t+1}{3t}}=\lim_{t\to 0}\left((1-6t)^{\frac{1}{-6t}}\right)^{-6t\frac{t+1}{3t}}=$$

$$=\lim_{t\to 0}e^{-2(t+1)}=e^{-2}.$$

Пределы с корнями

Задача 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+7x}-3x\right)$

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+7x}-3x\right)=(\infty-\infty)=$ умножим и поделим на сопряженное выражение

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+7x}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+7x}+3x\right)}{\left(\sqrt{9x^2+7x}+3x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(9x^2+7x-9x^2\right)}{\left(\sqrt{9x^2+7x}+3x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{7x}{\left(\sqrt{9x^2+7x}+3x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{7}{\left(\sqrt{9+7/x}+3\right)}=\frac{7}{3+3}=\frac{7}{6}.$$

Задача 9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+5x}-2x\right)$

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+5x}-2x\right)=(\infty-\infty)=$ умножим и поделим на сопряженное выражение

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+5x}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+5x}+2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+5x}+2x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(4x^2+5x-4x^2\right)}{\left(\sqrt{4x^2+5x}+2x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{\left(\sqrt{4x^2+5x}+2x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{\left(\sqrt{4+5/x}+2\right)}=\frac{5}{\left(\sqrt{4+0}+2\right)}=\frac{5}{4}.$$

Задача 10. $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{\sqrt{2x+8}-4}=\left(\frac{3-3}{4-4}=\frac{0}{0}\right)=$ умножим и поделим на выражения, сопряженные числителю и знаменателю

$$=\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{x+5}-3\right)\left(\sqrt{x+5}+3\right)\left(\sqrt{2x+8}+4\right)}{\left(\sqrt{2x+8}-4\right)\left(\sqrt{2x+8}+4\right)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}=\lim_{x\to4}\frac{(x+5-9)\left(\sqrt{2x+8}+4\right)}{(2x+8-16)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)\left(\sqrt{2x+8}+4\right)}{(2x-8)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)\left(\sqrt{2x+8}+4\right)}{2(x-4)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}=\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{2x+8}+4\right)}{2\left(\sqrt{x+5}+3\right)}=\frac{(4+4)}{2(3+3)}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}.$$

Задача 11. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-2}{\sqrt[4]{x}-1}$

Решение. Делаем замену переменной, $y=x^{1/12}$, $x=y^{12}$, $y\to1$. Получаем:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-2}{\sqrt[4]{x}-1}=\left(\frac{1+1-2}{1-1}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{y\to1}\frac{y^4+y^2-2}{y^3-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Получили неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Раскладываем числитель и знаменатель на множители.

$$=\lim_{y\to1}\frac{(y-1)(y+1)\left(y^2+2\right)}{(y-1)\left(y^2+y+1\right)}=\lim_{y\to1}\frac{(y+1)\left(y^2+2\right)}{\left(y^2+y+1\right)}=\frac{2\cdot3}{3}=2.$$

Пределы с неопределенностью бесконечность на бесконечность

Задача 12. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-x^2+6}{2x^4-x+2}$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-x^2+6}{2x^4-x+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

Получили неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Старшая степень числителя x^4, знаменателя x^4.

Делим на x^4 числитель и знаменатель:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-x^2+6}{2x^4-x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-1/x^2+6/x^4}{2-1/x^3+2/x^4}=\frac{3-0+0}{2-0+0}=\frac{3}{2}.$$

Ответ: 3/2.

Задача 13. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-4x+5}{x^2-4x+3}$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-4x+5}{x^2-4x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

Получили неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Старшая степень числителя x^2, знаменателя x^2.

Делим на x^2 числитель и знаменатель:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-4/x+5/x^2}{1-4/x+3/x^2}=\frac{2-0+0}{1-0+0}=\frac{2}{1}=2.$$

Ответ: 2.

Эквивалентности

Задача 14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+xe^x)}{\ln(1+(x+\sqrt{1+x^2}-1))}=$$

$$\left| \begin{array}{l} \textit{неопределенность раскроем по} \\ \textit{таблице эквивалентности, заменив} \\ \ln(1+xe^x) \to xe^x; \\ \ln(1+(x+\sqrt{1+x^2}-1)) \to x+\sqrt{1+x^2}-1 \end{array} \right| =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+xe^x}{x+\sqrt{1+x^2}-1} = \left| \begin{array}{l} \textit{по правилу Лопиталя раскроем} \\ \textit{неопределенность} \end{array} \right| = \lim_{x\to 0}\frac{(1+xe^x)'}{(x+\sqrt{1+x^2}-1)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x+xe^x}{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x(1+x)}{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ответ. 1

Задача 15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot \operatorname{tg} 3x}{e^{2x^2}-1}$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot \operatorname{tg} 3x}{e^{2x^2}-1} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

Получили неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Используем известные эквивалентности:

$\sin t \sim t,\ \operatorname{tg} t \sim t,\ e^t \sim 1+t$ при $t \to 0$.

Получаем:

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot 3x}{1+2x^2-1} = \lim_{x\to 0}\frac{6x^2}{2x^2} = 3.$$

Задача 16. Найти предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos\left(\operatorname{tg} 3x^2\right)\right)\cdot\left(3^{\operatorname{arctg} 2x}-1\right)}{\left(\sqrt[3]{1-\sin^2 2x^2}-1\right)\cdot \ln\left(1+\arcsin 8x\right)}$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos\left(\operatorname{tg}3x^2\right)\right)\cdot\left(3^{\operatorname{arctg}2x}-1\right)}{\left(\sqrt[3]{1-\sin^2 2x^2}-1\right)\cdot\ln(1+\arcsin 8x)}=\left|\begin{array}{l}\quad\textit{используем эквивалентности}\\ \sin x\sim x,\ \operatorname{tg}x\sim x,\ \operatorname{arctg}x\sim x,\ \arcsin x\sim x,\\ \textit{при}\ \ x\to 0.\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos\left(3x^2\right)\right)\cdot\left(3^{2x}-1\right)}{\left(\sqrt[3]{1-4x^4}-1\right)\cdot\ln(1+8x)}=\left|\begin{array}{l}\quad\textit{используем эквивалентности}\\ \ln(1+x)\sim x,\ 1-\cos x\sim x^2/2,\ a^x-1\sim x\ln a\\ \textit{при}\ \ x\to 0.\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}9x^4\cdot 2x\cdot\ln 3}{\left(\sqrt[3]{1-4x^4}-1\right)\cdot 8x}=\lim_{x\to 0}\frac{9x^4\cdot\ln 3}{\left(\sqrt[3]{1-4x^4}-1\right)\cdot 8}=\frac{9\ln 3}{8}\lim_{x\to 0}\frac{x^4\left(\sqrt[3]{\left(1-4x^4\right)^2}+\sqrt[3]{1-4x^4}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{1-4x^4}-1\right)\left(\sqrt[3]{\left(1-4x^4\right)^2}+\sqrt[3]{1-4x^4}+1\right)}=$$

$$=\frac{9\ln 3}{8}\lim_{x\to 0}\frac{x^4\left(\sqrt[3]{\left(1-4x^4\right)^2}+\sqrt[3]{1-4x^4}+1\right)}{\left(1-4x^4-1\right)}=\frac{9\ln 3}{8}\lim_{x\to 0}\frac{x^4\left(\sqrt[3]{\left(1-4x^4\right)^2}+\sqrt[3]{1-4x^4}+1\right)}{\left(-4x^4\right)}=$$

$$=-\frac{9\ln 3}{32}\lim_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{\left(1-4x^4\right)^2}+\sqrt[3]{1-4x^4}+1\right)=-\frac{27\ln 3}{32}.$$

Правило Лопиталя

Задача 17. Найти предел при помощи правила Лопиталя $\lim\limits_{x\to 0+}\sin x\ln x$

Решение.

$$\lim_{x\to 0+}\sin x\ln x=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/\sin x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

Применяем правило Лопиталя

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{(\ln x)'}{(1/\sin x)'}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}\cos x}=-\lim_{x\to 0+}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=-\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{\cos x}=-\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{\cos x}=0.$$

Задача 18. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Применяем правило Лопиталя несколько раз:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sin^2 x-x^2\cos^2 x\right)'}{\left(x^2\sin^2 x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x-2x\cos^2 x+x^2 2\sin x\cos x}{2x\sin^2 x+x^2 2\sin x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-2x\cos x+2x^2\sin x}{2x\sin^2 x+2x^2\sin x\cos x}\cos x=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-\cos x+x\sin x}{x\sin x+x^2\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cos x=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-\cos x+x\sin x}{x\sin x+x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin x}{x}-\cos x}{x\sin x+x^2\cos x}+\frac{x\sin x}{x\sin x+x^2\cos x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x+x^3\cos x}+\frac{\sin x}{\sin x+x\cos x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{2x\sin x+x^2\cos x+3x^2\cos x-x^3\sin x}+\frac{\cos x}{\cos x+\cos x-x\sin x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\sin x}{2x\sin x+4x^2\cos x-x^3\sin x}\right)+\frac{1}{2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{2\sin x+4x\cos x-x^2\sin x}\right)+\frac{1}{2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{2\cos x+4\cos x-4x\sin x-2x\sin x-x^2\cos x}\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Задача 19. Найти пределы функции, применяя правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{2x}}{\ln(1-2x)}$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{2x}}{\ln(1-2x)}=\left(\frac{1-1}{\ln 1}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Получили неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяем правило Лопиталя – берем производную от числителя и знаменателя:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-e^{2x}\right)'}{\left(\ln(1-2x)\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-2e^{2x}}{\frac{-2}{1-2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}}{\frac{1}{1-2x}}=\lim_{x\to 0}(1-2x)e^{2x}=(1-0)e^0=1.$$

Ответ: 1.

Точки разрыва и непрерывность

Задача 20. Если функция $y=f(x)$ задана различными аналитическими выражениями для различных областей изменения независимой переменной. Найти точки разрыва функции, если они существуют.

$$y=\begin{cases}1-2x, \ x<0,\\ 2^x, \ 0\le x<2,\\ 1{,}5, \ x\ge 2.\end{cases}$$

Решение. Функция непрерывна на каждом из интервалов $(-\infty;0)$, $(0;2)$, $(2;+\infty)$. Исследуем на непрерывность точки $x=0, \ x=2$.

Пусть $x=0$. Найдем пределы слева и справа:
$\lim\limits_{x\to -0} y(x)=\lim\limits_{x\to -0}(1-2x)=1$,
$\lim\limits_{x\to +0} y(x)=\lim\limits_{x\to +0}(2^x)=1$.
Пределы слева и справа конечны и равны, поэтому функция непрерывна в $x=0$.

Пусть $x=2$. Найдем пределы слева и справа:
$\lim\limits_{x\to 2-0} y(x)=\lim\limits_{x\to 2-0}(2^x)=4$,
$\lim\limits_{x\to 2+0} y(x)=\lim\limits_{x\to 2+0} 1{,}5=1{,}5$.
Пределы слева и справа конечны, но не равны, поэтому в точке $x=2$ функция терпит разрыв первого рода («скачок»).

Задача 21. Функция $y=f(x)$ задана различными аналитическими выражениями в различных областях изменения независимой переменной. Найти точки разрыва функции, если они существуют, и построить ее график.

$$f(x)=\begin{cases}2 & \text{при} \quad x<-1,\\ 2-2x & \text{при} \quad -1\le x<1,\\ \ln x & \text{при} \quad 1\le x.\end{cases}$$

Решение. Функция непрерывна на каждом из интервалов $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$, $(1;+\infty)$. Исследуем на непрерывность точки $x=-1, \ x=1$.

Пусть $x=-1$. Найдем пределы слева и справа:
$\lim\limits_{x\to -1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to -1-0} 2=2$,
$\lim\limits_{x\to -1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to -1+0}(2-2x)=2+2=4$.

Пределы слева и справа конечны, но не равны, поэтому в точке $x=-1$ функция терпит разрыв первого рода («скачок»).

Пусть $x=1$. Найдем пределы слева и справа:
$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}(2-2x)=2-2=0$,
$\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}\ln x=\ln 1=0$.
Пределы слева и справа конечны и равны, поэтому функция непрерывна в $x=1$.

Построим график функции: