

### Контрольная работа по теме Пределы РГР №3

**Задача.** Вычислите пределы, используя 1-й и 2-й замечательные пределы, эквивалентные бесконечно малые, правило Лопиталя.

А)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x - x^2 - 4}{x^2 - 2x - 8}$

**Решение.**

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x - x^2 - 4}{x^2 - 2x - 8} = \left( \frac{20 - 16 - 4}{16 - 8 - 8} \right) = \left( \frac{0}{0} \right) =$$

Получили неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ . Раскладываем числитель и знаменатель на

множители и сокращаем:

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(x-4)(x-1)}{(x-4)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(x-1)}{(x+2)} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}.$$

Б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x - 4}{3 + x - 4x^2}$

**Решение.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x - 4}{3 + x - 4x^2} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) =$$

Получили неопределенность вида  $\frac{\infty}{\infty}$ . Старшая степень числителя  $x^3$ , знаменателя  $x^2$ .

Делим на  $x^2$  числитель и знаменатель:

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1/x - 4/x^2}{3/x^2 + 1/x - 4} = \left( \frac{\infty}{0 + 0 - 4} \right) = -\infty.$$

В)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x \cdot \sin 2x}$

**Решение.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x \cdot \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \cdot \sin 2x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{x}{\cos^2 x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{1}{2x} =$$

Используем первый замечательный предел  $\frac{\sin t}{t} \rightarrow 1, t \rightarrow 0$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos^2 x} = \frac{1}{2}.$$

Г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x-1}{5x+4} \right)^{2x+1}$

**Решение.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x-1}{5x+4} \right)^{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x+4-4-1}{5x+4} \right)^{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-5}{5x+4} \right)^{2x+1} = (1^\infty)$$

Приводим к второму замечательному пределу  $\left( 1 + \frac{1}{t} \right)^t \rightarrow e, t \rightarrow \infty$ .

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left( 1 + \frac{-5}{5x+4} \right)^{\frac{5x+4}{-5}} \right)^{\frac{-5}{5x+4} \cdot 2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-5(2x+1)}{5x+4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-5(2+1/x)}{5+4/x}} = e^{-10/5} = e^{-2}.$$

Д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right)$

**Решение.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} \right) = |\sin x \sim x| = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x - \sin x}{x^3} \right) =$$

Применяем правило Лопиталья:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cos x}{3x^2} \right) = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{6x} \right) = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{6} \right) = \frac{1}{6}.$$