Контрольная по аналитической геометрии с решением

(Сборник задач по аналитической геометрии, П.С.Моденов, А.С.Пархоменко)

Задание 1

Даны вершины треугольника ABC: A=(6,0), B=(0,4), C=(6,4). Написать уравнение линии второго порядка, описанного около этого треугольника, зная, что ее центр находится в точке M = (4,3).

Решение

Перенесем центр координат в точку $M(4;3)$. Тогда, получаем, что координаты преобразуются следующим образом

$$\begin{cases} x = x' + 4 \\ y = y' + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x - 4 \\ y' = y - 3 \end{cases}$$

Тогда, получаем, что точки A, B, C преобразуются в точки $A'(2;-3), B'(-4;1), C'(2;1)$

В новой системе координат уравнение кривой второго порядка можно записать в виде $ax'^2 + by'^2 + cx'y' = 1$

Тогда, подставляя точки получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 4a + 9b - 6c = 1 \\ 16a + b - 4c = 1 \\ 4a + b + 2c = 1 \end{cases}$$

Решим данную систему

$$\begin{cases} 4a+9b-6c=1 \\ 16a+b-4c=1 \\ 4a+b+2c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1-4a-2c \\ 4a+9(1-4a-2c)-6c=1 \\ 16a+1-4a-2c-4c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1-4a-2c \\ 4a+9-36a-18c-6c=1 \\ 12a=6c \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=1-4a-2c \\ -32a-24c=-8 \\ c=2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1-4a-2c \\ 4a+3c=1 \\ c=2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1-4a-2c \\ 4a+3(2a)=1 \\ c=2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{10} \\ b=\frac{1}{5} \\ c=\frac{1}{5} \end{cases}$$

Тогда, получаем $\frac{1}{10}x'^2+\frac{1}{5}y'^2+\frac{1}{5}x'y'=1$ или $x'^2+2y'^2+2x'y'=10$

Подставляя преобразование координат получаем

$$(x-4)^2+2(y-3)^2+2(x-4)(y-3)=10$$
$$x^2-8x+16+2y^2-12y+18+2(xy-3x-4y+12)=10$$
$$x^2-8x+16+2y^2-12y+18+2xy-6x-8y+24=10$$
$$x^2+2y^2+2xy-14x-20y+48=0$$

Задание 2

Составить уравнения плоскостей, касающихся сферы

$(x – a)^2 + (y – b)^2 + (z – c)^2 = R^2$ И параллельных плоскости Ax + By + Cz + D = 0

Решение

Так как плоскости будет параллельны плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, то они также будут записаны в виде $Ax+By+Cz+x=0$, где параметр x найдем из того факта, что расстояние от точки (a,b,c) до данной плоскости должно быть равно R. Тогда, получаем

$R=\frac{|Aa+Bb+Cc+x|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Тогда, получаем

$$|Aa+Bb+Cc+x| = R\sqrt{A^2+B^2+C^2}$$
$$Aa+Bb+Cc+x = \pm R\sqrt{A^2+B^2+C^2}$$
$$x = \pm R\sqrt{A^2+B^2+C^2} - (Aa+Bb+Cc)$$

Значит, уравнения плоскостей запишутся в виде

$$Ax+By+Cz \pm R\sqrt{A^2+B^2+C^2} - (Aa+Bb+Cc) = 0$$
$$A(x-a)+B(y-b)+C(z-c) \pm R\sqrt{A^2+B^2+C^2} = 0$$

Задание 3

Найти геометрическое место точек, отношение расстояний которых до двух скрещивающихся прямых есть одно и то же число k.

Решение

Пусть дано две скрещивающие прямые

Принять за начало координат середину O общего перпендикуляра, а за оси Ox и Oy – прямые, лежащие в плоскости, параллельной данным прямым, то есть прямые в данной системе координат могут быть записаны в виде

$$l_1: \frac{x-a_1}{1} = \frac{y-a_2}{0} = \frac{z-a_3}{0} \text{ и } l_2: \frac{x+a_1}{0} = \frac{y+a_2}{1} = \frac{z+a_3}{0}.$$

Найдем расстояние от произвольной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до каждой из прямых.

Через точку M_0 проведем плоскость, перпендикулярную прямой l_1. Нормальный вектор данной плоскости будет равен (p_1, p_2, p_3), а так как точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на данной плоскости, то ее уравнение запишется в виде $x - x_0 = 0$.

Найдем точку пересечения прямой l_1 и полученной плоскости.

$$\begin{cases} x-x_0=0 \\ x-a_1=t \\ y-a_2=0 \\ z-a_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x_0 \\ y=a_2 \\ z=a_3 \end{cases}$$

Тогда, расстояние от точки до прямой будет равно

$$L_1=\sqrt{\left(x_0-x_0\right)^2+\left(a_2-y_0\right)^2+\left(a_3-z_0\right)^2}=\sqrt{\left(a_2-y_0\right)^2+\left(a_3-z_0\right)^2}$$

Аналогично для второй прямой получаем

$$\begin{cases} x+a_1=0 \\ y+a_2=t \\ y+a_0=0 \\ z+a_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-a_1 \\ y=y_0 \\ z=-a_3 \end{cases}$$

$$L_2=\sqrt{\left(-a_1-x_0\right)^2+\left(y_0-y_0\right)^2+\left(-a_3-z_0\right)^2}=\sqrt{\left(a_1+x_0\right)^2+\left(a_3+z_0\right)^2}$$

Тогда, получаем, что отношение расстоянии равно k

$$\frac{L_2}{L_1}=\sqrt{\frac{\left(a_1+x_0\right)^2+\left(a_3+z_0\right)^2}{\left(a_2-y_0\right)^2+\left(a_3-z_0\right)^2}}=k$$

Или

$$\frac{\left(a_1+x_0\right)^2+\left(a_3+z_0\right)^2}{\left(a_2-y_0\right)^2+\left(a_3-z_0\right)^2}=k^2$$

$$\left(a_1+x_0\right)^2+\left(a_3+z_0\right)^2=k^2\left(\left(a_2-y_0\right)^2+\left(a_3-z_0\right)^2\right)$$

Так как данное равенство будет верно для любой точки поверхности тогда заменим x_0, y_0, z_0 на x, y, z

$$(a_1+x)^2+(a_3+z)^2=k^2\left((a_2-y)^2+(a_3-z)^2\right)$$
$$(a_1+x)^2-k^2(a_2-y)^2=k^2(a_3-z)^2-(a_3+z)^2$$
$$(a_1+x)^2-k^2(a_2-y)^2=k^2\left(a_3^2-2a_3z+z^2\right)-a_3^2-2a_3z-z^2$$
$$(a_1+x)^2-k^2(a_2-y)^2=k^2a_3^2-2k^2a_3z+k^2z^2-a_3^2-2a_3z-z^2$$
$$(a_1+x)^2-k^2(a_2-y)^2=\left(k^2-1\right)a_3^2-2k^2a_3z+\left(k^2-1\right)z^2-2a_3z$$
$$(a_1+x)^2-k^2(a_2-y)^2=\left(k^2-1\right)a_3^2-2\left(k^2-1\right)a_3z+\left(k^2-1\right)z^2+4a_3z$$
$$(a_1+x)^2-k^2(a_2-y)^2=\left(k^2-1\right)(a_3-z)^2+4a_3z$$

При $k^2-1=0\Rightarrow k=1$ получаем

$(a_1+x)^2-(a_2-y)^2=4a_3z\Rightarrow z=\dfrac{(a_1+x)^2-(a_2-y)^2}{4a_3}$, то есть получаем гиперболический параболоид

При $k^2-1\neq 0\Rightarrow k\neq 1$ получаем

$$(a_1+x)^2-k^2(a_2-y)^2=\left(k^2-1\right)(a_3-z)^2+4a_3z$$
$$(a_1+x)^2-k^2(a_2-y)^2=\left(k^2-1\right)(a_3-z)^2-4a_3(a_3-z-a_3)$$
$$(a_1+x)^2-k^2(a_2-y)^2=\left(k^2-1\right)(a_3-z)^2-4a_3^2(a_3-z)+4a_3^2$$
$$(a_1+x)^2-k^2(a_2-y)^2=\left(k^2-1\right)\left[(a_3-z)^2-\frac{4a_3^2}{k^2-1}(a_3-z)\right]+4a_3^2$$
$$(a_1+x)^2-k^2(a_2-y)^2=\left(k^2-1\right)\left[(a_3-z)^2-\frac{4a_3^2}{k^2-1}(a_3-z)+\left(\frac{2a_3^2}{k^2-1}\right)^2-\left(\frac{2a_3^2}{k^2-1}\right)^2\right]+4a_3^2$$
$$(a_1+x)^2-k^2(a_2-y)^2=\left(k^2-1\right)\left(a_3-z-\frac{2a_3^2}{k^2-1}\right)^2-\frac{4a_3^4}{k^2-1}+4a_3^2$$

Обозначим $a_3-\dfrac{2a_3^2}{k^2-1}=A,-\dfrac{4a_3^4}{k^2-1}+4a_3^2=B$, тогда получим

$$(a_1+x)^2-k^2(a_2-y)^2=(k^2-1)(a_3-z)^2+4a_3z$$
$$(a_1+x)^2-k^2(a_2-y)^2=(k^2-1)(a_3-z)^2-4a_3(a_3-z-a_3)$$
$$(a_1+x)^2-k^2(a_2-y)^2=(k^2-1)(a_3-z)^2-4a_3^2(a_3-z)+4a_3^2$$
$$(a_1+x)^2-k^2(a_2-y)^2=(k^2-1)\left[(a_3-z)^2-\frac{4a_3^2}{k^2-1}(a_3-z)\right]+4a_3^2$$
$$(a_1+x)^2-k^2(a_2-y)^2=(k^2-1)\left[(a_3-z)^2-\frac{4a_3^2}{k^2-1}(a_3-z)+\left(\frac{2a_3^2}{k^2-1}\right)^2-\left(\frac{2a_3^2}{k^2-1}\right)^2\right]+4a_3^2$$
$$(a_1+x)^2-k^2(a_2-y)^2=(k^2-1)(A-z)^2+B$$
$$(a_1+x)^2-k^2(a_2-y)^2-(k^2-1)(A-z)^2=B$$
$$\frac{(a_1+x)^2}{B}-\frac{(a_2-y)^2}{\frac{B}{k^2}}-\frac{(A-z)^2}{\frac{B}{k^2-1}}=1$$

То есть, получаем однополостный гиперболоид.

Итого, получаем, что данная поверхность есть однополостный гиперболоид при $k \neq 1$, гиперболический параболоид при $k=1$

Задание 1

Найти условие необходимое и достаточное для того чтобы две действительные и пересекающиеся окружности

$x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0$,

$x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0$

были ортогональны

Решение

Составим уравнение касательной в окружности $x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0$ в точке (x_0, y_0)

$$\left(x^2+y^2+2a_1x+2b_1y+c_1\right)'=0'$$
$$2x+2yy'+2a_1+2b_1y'=0$$
$$y'\left(2y+2b_1\right)=-2x-2a_1$$
$$y'=-\frac{x+a_1}{y+b_1}$$

То есть, угловой коэффициент касательной равен $y'\left(x_0,y_0\right)=-\dfrac{x_0+a_1}{y_0+b_1}$

Аналогично для второй окружности получаем $y'\left(x_0,y_0\right)=-\dfrac{x_0+a_2}{y_0+b_2}$

Так как окружности перпендикулярны, значит, произведение угловых коэффициентов равно -1

$-\dfrac{x_0+a_1}{y_0+b_1}\left(-\dfrac{x_0+a_2}{y_0+b_2}\right)=-1\Rightarrow\dfrac{x_0+a_1}{y_0+b_1}\dfrac{x_0+a_2}{y_0+b_2}=-1$ или получаем

$$\begin{aligned}&\left(x_0+a_1\right)\left(x_0+a_2\right)=-\left(y_0+b_1\right)\left(y_0+b_2\right)\\&x_0^2+x_0\left(a_1+a_2\right)+a_1a_2+y_0^2+y_0\left(b_1+b_2\right)+b_1b_2=0\end{aligned}\qquad(1)$$

При этом, точка $\left(x_0,y_0\right)$ лежит на обоих окружностях, то есть

$$x_0^2+y_0^2+2a_1x_0+2b_1y_0+c_1=0$$
$$x_0^2+y_0^2+2a_2x_0+2b_2y_0+c_2=0$$

Сложим эти два уравнения

$$2x_0^2+2y_0^2+2\left(a_1+a_2\right)x_0+2\left(b_1+b_2\right)y_0+c_1+c_2=0\quad(2)$$

Из (2) вычтем уравнение (1) умноженное на 2

$$2x_0^2+2y_0^2+2\left(a_1+a_2\right)x_0+2\left(b_1+b_2\right)y_0+c_1+c_2-\left(2x_0^2+2x_0\left(a_1+a_2\right)+2a_1a_2+2y_0^2+2y_0\left(b_1+b_2\right)+2b_1b_2\right)=0$$
$$2x_0^2+2y_0^2+2\left(a_1+a_2\right)x_0+2\left(b_1+b_2\right)y_0+c_1+c_2-2x_0^2-2x_0\left(a_1+a_2\right)-2a_1a_2-2y_0^2-2y_0\left(b_1+b_2\right)-2b_1b_2=0$$
$$+c_1+c_2-2a_1a_2-2b_1b_2=0$$
$$2a_1a_2+2b_1b_2=c_1+c_2$$

Получили условие при котором две действительные и пересекающиеся окружности будут ортогональны

Задание 2

Три вершины параллелограмма находятся в точках O = (0, 0) , A = (4, 0), B =(2, 2) ; A и B – противоположные вершины. Написать уравнение эллипса, вписанного в этот параллелограмм и касающегося стороны OA в ее середине.

Решение

Найдем координаты точки С(x, y). Так как $\overline{OA} = \overline{BC}$. Тогда, получаем

$$\begin{cases} x-2=4-0 \\ y-2=0-0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$$

Центр данного эллипса находится в центре параллелограмма, то есть в точке $M\left(\frac{4+2}{2};\frac{0+2}{2}\right)=(3;1)$

Точка $E\left(\frac{0+4}{2};\frac{0+0}{2}\right)=(2;0)$ - середина стороны OA лежит на данном эллипсе.

На этом эллипсе также лежат середины остальных сторон $F\left(\frac{2+0}{2};\frac{2+0}{2}\right)=(1;1)$ - середина стороны BC и $G\left(\frac{4+6}{2};\frac{0+2}{2}\right)=(5;1)$ - середина стороны AC

Перенесем центр координат в точку $M(3;1)$. Тогда, получаем, что координаты преобразуются следующим образом

$$\begin{cases} x=x'+3 \\ y=y'+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=x-3 \\ y'=y-1 \end{cases}$$

Тогда, получаем, что точки E, F, G преобразуются в точки $E'(-1;-1), F'(-2;0), G'(2;0)$

В новой системе координат уравнение кривой второго порядка можно записать в виде $ax'^2+by'^2+cx'y'=1$

Тогда, подставляя точки получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 4a=1 \\ 4a=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{4} \\ b+c=\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Тогда, получаем уравнение

$$\frac{x'^2}{4}+\left(\frac{3}{4}-c\right)y'^2+cx'y'=1$$
$$x'^2+(3-4c)y'^2+4cx'y'=4$$

Подставляя преобразование координат получаем

$$(x-3)^2+(3-4c)(y-1)^2+4c(x-3)(y-1)=4$$

Так как весь эллипс лежит внутри параллелограмма, поэтому при $y=0$ должны получить единственную точку касания, то есть получаем

$$(x-3)^2+(3-4c)(0-1)^2+4c(x-3)(0-1)=4$$
$$(x-3)^2+(3-4c)-4c(x-3)=4$$
$$(x-3)^2-4c(x-3)+(-1-4c)=0$$
$$D=(4c)^2+4(1+4c)=16c^2+4+16c=4\left(4c^2+4c+1\right)=4(2c+1)^2=0 \Rightarrow c=-\frac{1}{2}$$

Тогда, получаем

$$(x-3)^2+\left(3-4\left(-\frac{1}{2}\right)\right)(y-1)^2+4\left(-\frac{1}{2}\right)(x-3)(y-1)=4$$
$$(x-3)^2+5(y-1)^2-2(x-3)(y-1)=4$$
$$x^2-6x+9+5y^2-10y+5-2xy+2x+6y-6=4$$
$$x^2+5y^2-2xy-4x-4y+4=0$$

Задание 3
Составить уравнение плоскости, касающейся сферы
$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ в данной на ней точке (x_0, y_0, z_0)

Решение

В точке касания проводим плоскость.

Нормальный вектор данной плоскости равен направляющему вектору радиуса-прямой, проведенной из точки (a,b,c) к точке (x_0, y_0, z_0), то есть, $(x_0 - a, y_0 - b, z_0 - c)$, а так как точка (x_0, y_0, z_0) лежит на этой плоскости, тогда получаем, что ее уравнение можно записать в виде $(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) + (z_0 - c)(z - z_0) = 0$