Криволинейные и поверхностные интегралы

Криволинейный интеграл по длине дуги (1 рода)

Если кривая задана уравнением $y = \varphi(x)$, $a \le x \le b$, то интеграл вычисляется по формуле

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\, ds = \int\limits_{a}^{b} f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}\, dx.$$

Если кривая задана параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, то

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\, ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt.$$

Криволинейный интеграл по координатам (2 рода)

Пусть $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — непрерывны в точках дуги AB гладкой кривой K, имеющей уравнение $y = \varphi(x)$, $a \le x \le b$. Тогда криволинейный интеграл 2 рода вычисляется по формуле:

$$\int\limits_{AB} P\, dx + Q\, dy = \int\limits_{a}^{b} \left[P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x)\right] dx.$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, то

$$\int\limits_{AB} P\, dx + Q\, dy = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\right] dt.$$

Если путь интегрирования — простая замкнутая кривая, то интеграл берется по направлению против часовой стрелки.

Независимость криволинейного интеграла 2 рода от контура интегрирования

Если для криволинейного интеграла $\int_K P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$ выполняется следующее соотношение в области D

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

то по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в D, интеграл равен нулю, а для незамкнутых кривых не зависит от пути интегрирования (поэтому удобно выбирать путь как ломаную из отрезков, параллельных осям).

Вычисление площади

Площадь S фигуры, ограниченной простым замкнутым контуром C вычисляется по формуле (направление такое, что область остается слева):

$$S = \frac{1}{2} \oint\limits_{C} x\, dy - y\, dx.$$

Формула Грина

Пусть C — граница области D и функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывны со своими частными производными $\partial Q/\partial x$ и $\partial P/\partial y$ непрерывны в замкнутой области D.

$$\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Поверхностные интегралы

Пусть $F(x,y,z)$ — непрерывная функция и $z = f(x,y)$ — гладкая поверхность S, где f задана в некоторой области плоскости xOy. Поверхностный интеграл 1 рода вычисляется по формуле:

$$\iint\limits_S F\,dS = \iint\limits_D F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy.$$

Если $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ — непрерывные функции и S^+ — сторона гладкой поверхности S, характеризуемая направлением нормали $n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, то поверхностный интеграл 2 рода выражается как

$$\iint\limits_{S^+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS.$$

При переходе на другую сторону поверхности S^- интеграл меняет знак на противоположный. Если поверхность S задана уравнением в неявном виде $\Phi(x,y,z) = 0$, то направляющие косинусы нормали определяются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{\Phi'_x}{\pm\sqrt{(\Phi'_x)^2+(\Phi'_y)^2+(\Phi'_z)^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{\Phi'_y}{\pm\sqrt{(\Phi'_x)^2+(\Phi'_y)^2+(\Phi'_z)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\Phi'_z}{\pm\sqrt{(\Phi'_x)^2+(\Phi'_y)^2+(\Phi'_z)^2}}.$$