Теория поля

Градиентом скалярного поля $u = u(x, y, z)$ называется следующий вектор (направления наискорейшего роста u):

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Производная скалярного поля $u = u(x, y, z)$ по направлению l вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{1}{|l|}\nabla u \cdot l.$$

Пусть $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ — непрерывные со вместе со своими частными производными первого порядка функции. *Потоком* векторного поля $F = (P, Q, R)$ через поверхность S называется поверхностный интеграл

$$\Pi = \iint\limits_S F \cdot n\, dS = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS = \iint\limits_S P\, dy\, dz + Q\, dx\, dz + R\, dx\, dy.$$

Дивергенцией векторного поля $F = (P, Q, R)$ называется скаляр

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Если $\operatorname{div} F(M_0) > 0$, то точка M_0 называется *источником*, если $\operatorname{div} F(M_0) < 0$, то точка M_0 называется *стоком*. Векторное поле, во всех точках которого дивергенция равна нулю называется *соленоидальным*. Поток такого поля через любую поверхность равен нулю.

Линейным интегралом от вектора F по ориентированной кривой K называется криволинейный интеграл (работа поля вдоль кривой K)

$$\int\limits_K F\, dr = \int\limits_K P\, dx + Q\, dy + R\, dz.$$

Если контур C замкнутый, то линейный интеграл

$$\oint\limits_C F\, dr = \oint\limits_C P\, dx + Q\, dy + R\, dz.$$

называется *циркуляцией* векторного поля вдоль контура C.

Вихрем (ротором) векторного поля $F = (P, Q, R)$ называется вектор

$$\operatorname{rot} F = \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right), \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right)$$

Если для всех точек поля ротор равен нулю, то такое поле называется *потенциальным (безвихревым)*. В потенциальном поле циркуляция всегда равна нулю.

Формула Стокса. C — замкнутый контур, ограничивающий поверхность S. Направляющие косинусы нормали к поверхности S — $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ (со стороны нормали обход по контуру C осуществляется против часовой стрелки).

$$\oint\limits_C R\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS.$$

Формула Стокса в векторной форме: циркуляция вектора вдоль замкнутого контура C, ограничивающего некоторую поверхность S, равна потоку вихря через эту поверхность.

$$\oint\limits_C F\,dr = \iint\limits_S n\cdot\operatorname{rot} F\,dS.$$

Формула Гаусса-Остроградского. T — замкнутая область ограниченная замкнутой гладкой поверхностью S. $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S.

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dS = \iiint\limits_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

Формула Гаусса-Остроградского в векторной форме: интеграл от дивергенции векторного поля F, распространенный по некоторому объему T, равен потоку вектора через поверхность S, ограничивающую данный объем.

$$\iint\limits_S F\cdot n\,dS = \iiint\limits_T \operatorname{div} F\,dV.$$

Формула Грина. C — граница области D и функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывны со своими частными производными $\partial Q/\partial x$ и $\partial P/\partial y$ непрерывны в замкнутой области D.

$$\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$