

## Задача с решением по уравнению с математической физики Задача Коши для волнового уравнения

ЗАДАНИЕ.

Решить задачу Коши для волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, t > 0; \quad u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi(x). \\ f(x) = 3^x, \quad \varphi(x) = \sin 2x.$$

РЕШЕНИЕ.

Применим метод Даламбера. Уравнение характеристик имеет вид:

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0.$$

Последнее уравнения распадается на два уравнения, решениями которых являются прямые:

$$x - at = C_1, \quad x + at = C_2.$$

Выполняя замену

$$\xi = x + at,$$

$$\eta = x - at,$$

придем к уравнению:

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Общий интеграл последнего уравнения легко получить повторным интегрированием по  $\xi$  и по  $\eta$ :

$$u(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta).$$

Возвращаясь к старым переменным, получим

$$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at). \quad (*)$$

Подставляя решение в начальные условия, получим:

$$u|_{t=0} = f_1(x) + f_2(x) = 3^x,$$

$$u_t|_{t=0} = af_1'(x) - af_2'(x) = \sin 2x.$$

Интегрируя второе равенство, получим

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \sin 2s ds + C = \frac{1}{2a} (\sin 2x - \sin 2x_0) + C,$$

где  $x_0$  и  $C$  - постоянные.

Таким образом, получим

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = 3^x, \\ f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{2a} (\sin 2x - \sin 2x_0) + C. \end{cases}$$

Выразим теперь из последних двух равенств  $f_1$  и  $f_2$

$$f_1(x) = \frac{3^x}{2} + \frac{1}{4a} (\sin 2x - \sin 2x_0) + \frac{C}{2},$$

$$f_2(x) = \frac{3^x}{2} - \frac{1}{4a} (\sin 2x - \sin 2x_0) - \frac{C}{2}.$$

Подставляя полученные выражения в общее решение (\*) находим:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= f_1(x+at) + f_2(x-at) = \\ &= \frac{3^{x+at}}{2} + \frac{1}{4a} (\sin 2(x+at) - \sin 2x_0) + \frac{C}{2} + \\ &+ \frac{3^{x-at}}{2} - \frac{1}{4a} (\sin 2(x-at) - \sin 2x_0) - \frac{C}{2} = \\ &= 3^x \left( \frac{3^{at} + 3^{-at}}{2} \right) + \frac{1}{4a} (\sin(2x+2at) - \sin(2x-2at)) = \\ &= 3^x \left( \frac{3^{at} + 3^{-at}}{2} \right) + \frac{1}{2a} (\sin(2at) \cos(2x)). \end{aligned}$$

Таким образом, решение поставленной задачи Коши имеет вид:

$$u(x,t) = 3^x \left( \frac{3^{at} + 3^{-at}}{2} \right) + \frac{1}{2a} (\sin(2at) \cos(2x)).$$