Дифференциальное уравнение в частных производных с решением

Задание.

Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка.

$$xyu_x + (x - 2u)u_y = yu$$

Решение.

Составим систему уравнений:

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{x - 2u} = \frac{du}{yu}$$

Решая систему, найдем два независимых интеграла

1)

$$\frac{dx}{xy} = \frac{du}{yu}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u}$$

$$\ln u = \ln C_1 x$$

$$\frac{u}{x} = C_1$$

2)

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{x - 2u}$$

$$ydy = \left(\frac{x - 2u}{x}\right) dx = \left(1 - 2\frac{u}{x}\right) dx$$

$$ydy = (1 - 2C_1)dx$$

$$\frac{y^2}{2} = x - 2C_1 x + C_2$$

$$y^2 = 2x - 4C_1 x + C_2 = 2x - 4\frac{u}{x}x + C_2$$

$$y^2 - 2x + 4u = C_2$$

Следовательно, общее решение заданного уравнения имеет вид:

$$\Phi\left(\frac{u}{x};\ y^2 - 2x + 4u\right) = 0$$

Φ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Ответ: $\Phi\left(\frac{u}{x};\ y^2 - 2x + 4u\right) = 0$