Закон больших чисел и теорема Чебышева

Пример решения задачи

Задача. Дана последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ Случайная величина X_k может принимать значения: $-n\alpha, 0, n\alpha$ ($\alpha > 0, \alpha = const$) с вероятностями, соответственно равными: $\frac{1}{2n^2}; 1-\frac{1}{n^2}; \frac{1}{2n^2}$.

Применим ли к этой последовательности закон больших чисел?

Решение. Для того чтобы к последовательности случайных величин была применима теорема Чебышева, достаточно, чтобы эти величины были попарно независимы, имели конечные математические ожидания и равномерно ограниченные дисперсии.

Поскольку случайные величины независимы, они попарно независимы, то есть первое требование выполняется.

Проверим, выполняется ли требование конечности математического ожидания:

$$M(X_n) = -n\alpha \frac{1}{2n^2} + 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + n\alpha \frac{1}{2n^2} = 0.$$

Да, математические ожидания ограничены.

Исследуем дисперсии.

$$D(X_n) = (-n\alpha)^2 \frac{1}{2n^2} + 0^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + (n\alpha)^2 \frac{1}{2n^2} = \frac{\alpha^2 n^2}{2n^2} + \frac{\alpha^2 n^2}{2n^2} = \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2} = \alpha^2.$$

Дисперсии ограничены сверху $D(X_n) \le \alpha^2$.

Так как все требования выполнены, закон больших чисел применим.