Характеристическая функция распределения Паскаля

Задача. Найти характеристическую функцию дискретной случайной величины X, подчиняющейся закон распределения Паскаля $P(X=m)=\frac{a^m}{(1+a)^{m+1}}\,(a>0)$. По ней найти $M[X]$ и $D[X]$.

Решение. По определению, характеристическая функция для дискретного распределения равна: $E(u)=M\left[e^{iuX}\right]=\sum_m e^{iux_m}p_m$.

Получаем:

$$E(u)=M\left[e^{iuX}\right]=\sum_m e^{iux_m}p_m=\sum_m e^{ium}\frac{a^m}{(1+a)^{m+1}}=\sum_m\frac{\left(e^{iu}a\right)^m}{(1+a)^{m+1}}=$$

$$=\frac{1}{1+a}\sum_m\left(\frac{e^{iu}a}{1+a}\right)^m=\frac{1}{1+a}\frac{1}{1-\left(\frac{e^{iu}a}{1+a}\right)}=\frac{1}{1+a-ae^{iu}}.$$

Найдем производные:

$$E'(u)=\left(\frac{1}{1+a-ae^{iu}}\right)'=-\frac{1}{\left(1+a-ae^{iu}\right)^2}\left(-aie^{iu}\right)=\frac{aie^{iu}}{\left(1+a-ae^{iu}\right)^2}.$$

$$E''(u)=\left(\frac{aie^{iu}}{\left(1+a-ae^{iu}\right)^2}\right)'=\frac{aie^{iu}}{\left(1+a-ae^{iu}\right)^2}=\frac{\left(aie^{iu}\right)'\left(1+a-ae^{iu}\right)^2-aie^{iu}\left(\left(1+a-ae^{iu}\right)^2\right)'}{\left(1+a-ae^{iu}\right)^4}=$$

$$=\frac{-ae^{iu}\left(1+a-ae^{iu}\right)^2-2aie^{iu}\left(1+a-ae^{iu}\right)\left(-aie^{iu}\right)}{\left(1+a-ae^{iu}\right)^4}=\frac{\left(-ae^{iu}-a^2e^{iu}+a^2e^{2iu}\right)-2a^2e^{2iu}}{\left(1+a-ae^{iu}\right)^3}=$$

$$=\frac{-ae^{iu}-a^2e^{iu}-a^2e^{2iu}}{\left(1+a-ae^{iu}\right)^3}.$$

Тогда моменты:

$$M(X)=\frac{1}{i}E'(u)\Big|_{t=0}=\frac{1}{i}\frac{aie^{iu}}{\left(1+a-ae^{iu}\right)^2}\Bigg|_{u=0}=\frac{a}{(1+a-a)^2}=a.$$

$$M\left(X^2\right)=\frac{1}{i^2}E''(u)\Big|_{u=0}=\frac{1}{i^2}\left(\frac{-ae^{iu}-a^2e^{iu}-a^2e^{2iu}}{\left(1+a-ae^{iu}\right)^3}\right)\Bigg|_{u=0}=$$

$$=\frac{a+a^2+a^2}{(1+a-a)^3}=2a^2+a.$$

Получили:

$M(X) = a$

$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 2a^2 + a - a^2 = a^2 + a = a(a+1).$