Производящая функция для НСВ. Решение задачи

Задача. Абсолютно непрерывная случайная величина имеет плотность распределения

$$p(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{2} & x\in[0,\pi], \\ 0 & x\notin[0,\pi]. \end{cases}$$

Найти производящую функцию моментов.

Решение.

Найдем производящую функцию моментов:

$$M_X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}p(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{tx}\sin xdx=$$

Интегрируем по частям:

$$I=\int_0^{\pi} e^{tx}\sin xdx=\begin{vmatrix} u=\sin x & du=\cos xdx \\ dv=e^{tx}dx & v=\frac{1}{t}e^{tx} \end{vmatrix}=\frac{1}{t}e^{tx}\sin x\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{t}\int_0^{\pi} e^{tx}\cos xdx=$$

$$=\begin{vmatrix} u=\cos x & du=-\sin xdx \\ dv=e^{tx}dx & v=\frac{1}{t}e^{tx} \end{vmatrix}=-\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}e^{tx}\cos x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{t}\int_0^{\pi} e^{tx}\sin xdx\right)=$$

$$=-\frac{1}{t^2}\left(e^{t\pi}\cos\pi-1\right)+\frac{1}{t^2}I=\frac{1}{t^2}\left(e^{t\pi}+1\right)+\frac{1}{t^2}I=I,$$

$$\left(1-\frac{1}{t^2}\right)I=\frac{1}{t^2}\left(e^{t\pi}+1\right),$$

$$I=\frac{1}{t^2-1}\left(e^{t\pi}+1\right).$$

Тогда:

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{tx}\sin xdx=\frac{1}{2\left(t^2-1\right)}\left(e^{t\pi}+1\right)$$

Получили $M_X(t)=\dfrac{\left(e^{t\pi}+1\right)}{2\left(t^2-1\right)}$.