# Характеристическая функция непрерывного распределения

**Задача.** Найти характеристическую функцию непрерывной случайной величины, имеющей плотность распределения $p_\xi(x)=\dfrac{e^{-|x|}}{2}$

**Решение.** По определению, характеристическая функция равна:

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}p_\xi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\frac{e^{-|x|}}{2}dx=\int_{-\infty}^{0} e^{itx}\frac{e^{x}}{2}dx+\int_{0}^{+\infty} e^{itx}\frac{e^{-x}}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^{x(it+1)}dx+\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{x(it-1)}dx=\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left[\frac{e^{x(it+1)}}{it+1}\right]_a^0+\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{e^{x(it-1)}}{it-1}\right]_0^b=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left[\frac{e^{0(it+1)}}{it+1}-\frac{e^{a(it+1)}}{it+1}\right]+\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{e^{b(it-1)}}{it-1}-\frac{e^{0(it-1)}}{it-1}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{it+1}-\frac{1}{it-1}\right]=\frac{1}{2}\frac{it+1-(it-1)}{(it+1)(it-1)}=\frac{1}{1+t^2}.$$