Производящая функция. Решение задачи

Задача. Найти производящую функцию моментов для случайной величины, имеющей геометрическое распределение. Вычислить с помощью найденной функции математическое ожидание и дисперсию.

Решение. Пусть X имеет геометрическое распределение, то есть:
$P(X=m)=q^{m-1}p$, где p - вероятность наступления события, $m=1,2,\ldots$

Тогда производящая функция моментов равна

$$M_X(t)=\sum_{i=1}^{\infty}e^{tx_i}p_i=\sum_{i=1}^{\infty}e^{ti}q^{i-1}p=\frac{p}{q}\sum_{i=1}^{\infty}e^{ti}q^i=\frac{p}{q}\sum_{i=1}^{\infty}\left(qe^t\right)^i.$$

Вычислим с помощью найденной функции математическое ожидание и дисперсию. Для этого вычисляем первый и второй момент по формуле:

$$M\left[X^n\right]=\frac{d^n}{dt^n}\left(M_X(t)\right)\Big|_{t=0}.$$

Получаем:

$$\frac{d}{dt}M_X(t)=\frac{p}{q}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{\infty}\left(qe^t\right)^i=\frac{p}{q}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d}{dt}\left(qe^t\right)^i=\frac{p}{q}\sum_{i=1}^{\infty}i\left(qe^t\right)^i,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}M_X(t)=\frac{p}{q}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{\infty}i\left(qe^t\right)^i=\frac{p}{q}\sum_{i=1}^{\infty}i\frac{d}{dt}\left(qe^t\right)^i=\frac{p}{q}\sum_{i=1}^{\infty}i^2\left(qe^t\right)^i.$$

Далее:

$$\frac{d}{dt}M_X(t)\Big|_{t=0}=\frac{p}{q}\sum_{i=1}^{\infty}iq^i=\frac{p}{q}\frac{q}{(1-q)^2}=\frac{p}{q}\frac{q}{p^2}=\frac{1}{p}.$$

$$\frac{d^2}{dt^2}M_X(t)\Big|_{t=0}=\frac{p}{q}\sum_{i=1}^{\infty}i^2q^i=\frac{p}{q}\frac{q(1+q)}{(1-q)^3}=\frac{p}{q}\frac{q(1+q)}{p^3}=\frac{1+q}{p^2}.$$

Математическое ожидание: $M[X]=\frac{d}{dt}\left(M_X(t)\right)\Big|_{t=0}=\frac{1}{p}$.

Дисперсия: $D[X]=M\left[X^2\right]-\left(M[X]\right)^2=\frac{d^2}{dt^2}\left(M_X(t)\right)\Big|_{t=0}-\left(\frac{1}{p}\right)^2=\frac{1+q}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{q}{p^2}.$