

Гипергеометрическое распределение случайной величины

Пример решения

Задание. Из урны, содержащей 4 белых и 6 черных шаров, наудачу извлекают сразу 4 шара. Пусть X - число белых шаров в выборке. Найдите ряд распределения, функцию распределения и моду случайной величины X . Постройте многоугольник распределения и график функции распределения. Вычислите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение X , найдите вероятность события $\{X \geq MX\}$.

Решение. Пусть X – число белых шаров среди 4 в выборке. Она может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4.

Вероятности этих значений можно найти по формуле гипергеометрической вероятности:

$$P(X = k) = \frac{C_4^k \cdot C_6^{4-k}}{C_{10}^4}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$
 - вероятность того, что будет выбрано k шаров белого цвета (из 4) и еще $4 - k$ шаров черного цвета (из 6).

Вычисляем вероятности по этой формуле.

$$P(X = 0) = \frac{C_4^0 \cdot C_6^{4-0}}{C_{10}^4} = \frac{C_6^4}{C_{10}^4} = \frac{15}{210} \approx 0,0714$$

$$P(X = 1) = \frac{C_4^1 \cdot C_6^{4-1}}{C_{10}^4} = \frac{4 \cdot C_6^3}{C_{10}^4} = \frac{80}{210} \approx 0,381$$

Аналогично продолжаем далее. Занесем полученные данные в таблицу, получим закон распределения:

x_i	0	1	2	3	4	Сумма
P_i	0,0714	0,3810	0,4286	0,1143	0,0048	1,000

Сумма вероятностей равна 1, расчеты верные.

Найдем функцию распределения вероятностей $F(x)$ случайной величины X .

$F(x) = P(X < x)$, то есть

при $x \leq 0$, $F(x) = 0$,

при $0 < x \leq 1$, $F(x) = 0 + 0,0714 = 0,0714$,

при $1 < x \leq 2$, $F(x) = 0,0714 + 0,381 = 0,4524$,

при $2 < x \leq 3$, $F(x) = 0,4524 + 0,4286 = 0,881$,

при $3 < x \leq 4$, $F(x) = 0,881 + 0,1143 = 0,9952$,

при $x > 4$, $F(x) = 0,9952 + 0,0048 = 1$.

Мода случайной величины равна $Mo = 2$.

Многоугольник распределения.

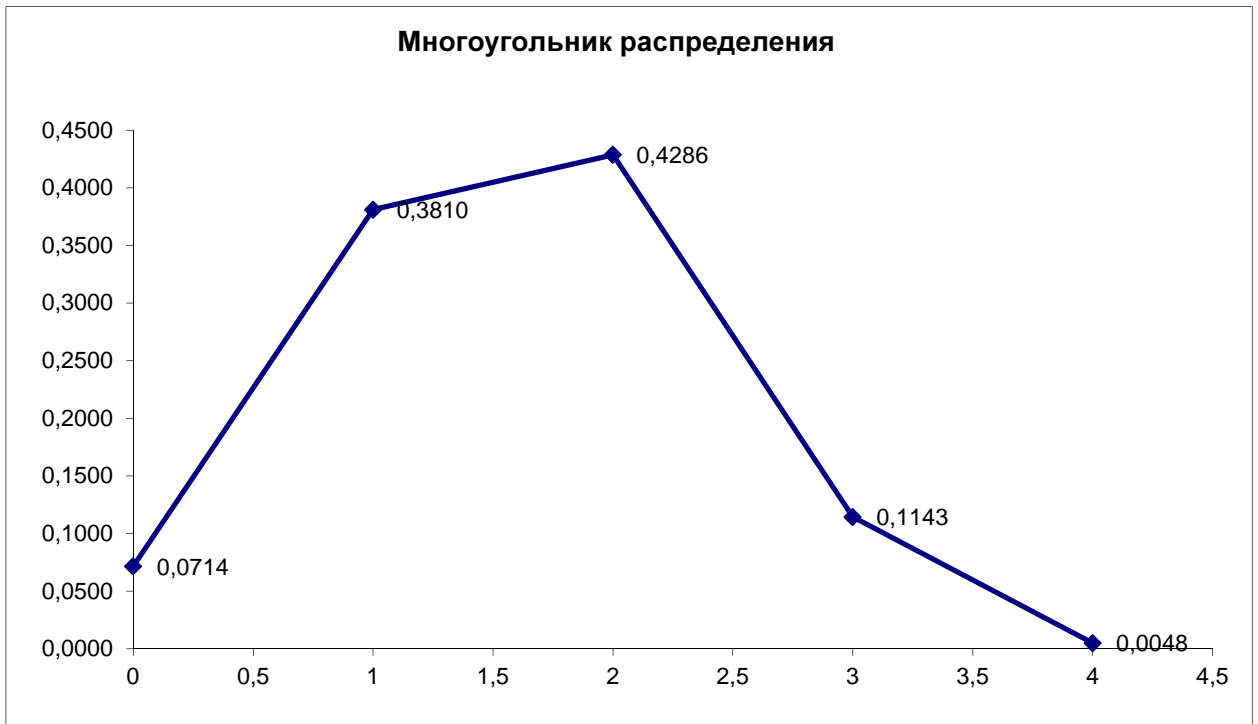
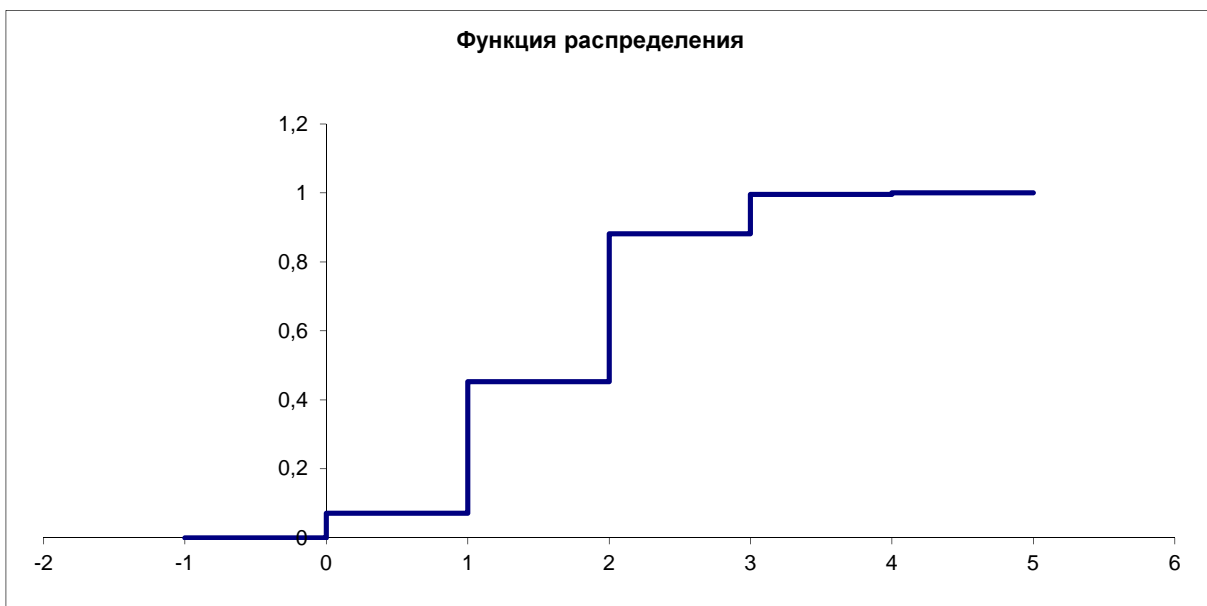


График функции распределения:



Математическое ожидание

$$MX = \sum x_i p_i = 1,6.$$

Дисперсия:

$$DX = \sum x_i^2 p_i - (MX)^2 = 3,2 - 1,6^2 = 0,64.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{DX} = \sqrt{0,64} = 0,8.$

Расчеты в таблице:

x_i	0	1	2	3	4	Сумма
P_i	0,0714	0,3810	0,4286	0,1143	0,0048	1
$x_i P_i$	0,0000	0,3810	0,8571	0,3429	0,0190	1,6
$x_i^2 P_i$	0,0000	0,3810	1,7143	1,0286	0,0762	3,2

Найдем вероятность события $\{X \geq MX\}$.

$$P(\{X \geq MX\}) = P(\{X \geq 1,6\}) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0,5476.$$