Задача скачана с сайта www.MatBuro.ru
Примеры решений по теории вероятностей
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике

Непрерывная двумерная случайная величина
(функция распределения, центр рассеивания)
Пример решения задачи

Задание. Интегральная функция распределения случайного вектора (*X*,*Y*):

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0 \text{ или } y\le 0\\ (1-e^{-2x})(1-e^{-3y}) & \text{при } x>0 \text{ и } y>0\end{cases}$$

Найти центр рассеивания случайного вектора.

Решение. Найдем плотности распределения составляющих величин X и Y и их математические ожидания.

Найдем плотность совместного распределения:

$$f(x,y)=F''_{xy}(x,y)=\begin{cases}0 & \text{ï ðè } x\le 0 \text{ èëè } y\le 0\\ 6e^{-2x}\cdot e^{-3y} & \text{ï ðè } x>0 \text{ è } y>0\end{cases}$$

Найдем плотности отдельных величин:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy=\int_0^{\infty}6e^{-2x}\cdot e^{-3y}dy=6e^{-2x}\int_0^{\infty}e^{-3y}dy=-2e^{-2x}\left(e^{-3y}\Big|_0^{\infty}\right)=2e^{-2x},$$

$$f(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx=\int_0^{\infty}6e^{-2x}\cdot e^{-3y}dx=6e^{-3y}\int_0^{\infty}e^{-2x}dx=-3e^{-3y}\left(e^{-2x}\Big|_0^{\infty}\right)=3e^{-3y}.$$

Найдем математические ожидания. Используем формулу:

$$\int te^{at}dt=\left|\begin{matrix}u=t & du=dt\\ dv=e^{at}dt & v=\frac{1}{a}e^{at}\end{matrix}\right|=t\frac{1}{a}e^{at}-\frac{1}{a}\int e^{at}dt=\frac{1}{a}te^{at}-\frac{1}{a^2}e^{at}+C.$$

Получаем:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,xdx=\int_0^{\infty}2e^{-2x}\cdot xdx=2\left(-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}\right)\Big|_0^{\infty}=2\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,ydy=\int_0^{\infty}3e^{-3y}\cdot ydy=3\left(-\frac{1}{3}ye^{-3y}-\frac{1}{9}e^{-3y}\right)\Big|_0^{\infty}=3\frac{1}{9}=\frac{1}{3}.$$

Центр рассеяния – это точка $\left(M(X),\,M(Y)\right)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$.