Дискретная двумерная случайная величина: решение задачи

Задача. Составить закон распределения X - сумм очков и Y - числа тузов при выборе двух карт из колоды, содержащей только тузов, королей и дам.
(туз=11, дама=3, король=4)

Найти законы распределения величин X и Y. Зависимы ли эти величины? Написать функцию распределения для (X, Y). Построить ковариационный граф. Посчитать ковариацию (X,Y). Написать ковариационную матрицу. Посчитать корреляцию (X,Y) и написать корреляционную матрицу.

Решение. Пусть заданы случайные величины:
X – (Сумма очков выборе двух карт из колоды),
Y – (Число тузов выборе двух карт из колоды).
Всего в колоде 12 карт, по 4 тура, дамы и короля.

X может принимать значения 6, 7, 8, 14, 15 и 22.
Y может принимать значения 0, 1 или 2.

Составим таблицу совместного распределения этих величин.

$X \setminus Y$	0	1	2
6			
7			
8			
14			
15			
22			

Найдем вероятности. Учитываем, что всего $n = C_{12}^2 = \frac{11 \cdot 12}{1 \cdot 2} = 66$ способов выбора комбинаций из 2 карт из данной колоды.

$(X = 6, Y = 0)$. Нет тузов, сумма очков равна 6, значит, выбраны 2 дамы. Число способов выбрать 2 дамы (из 4) равно $C_4^2 = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 6$. Поэтому вероятность:

$P(X = 6, Y = 0) = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$.

$(X = 6, Y = 1)$. Один туз, сумма очков равна 6, такое невозможно, поэтому вероятность: $P(X = 6, Y = 1) = 0$. Аналогично $P(X = 6, Y = 2) = 0$.

$(X = 7, Y = 0)$. Нет тузов, сумма очков равна 7, значит, выбраны туз и король. Число способов выбрать такие карты равно $4 \cdot 4 = 16$. Поэтому вероятность:

$P(X = 7, Y = 0) = \frac{16}{66} = \frac{8}{33}$.

Аналогично продолжаем вычисление вероятностей далее и заполняем таблицу:

$X \setminus Y$	0	1	2
6	1/11	0	0
7	8/33	0	0
8	1/11	0	0
14	0	8/33	0
15	0	8/33	0
22	0	0	1/11

Найдем законы распределения величин X и Y, складывая в данной таблице вероятности по строкам и столбцам. Получим:

x_i	p_i
6	1/11
7	8/33
8	1/11
14	8/33
15	8/33
22	1/11

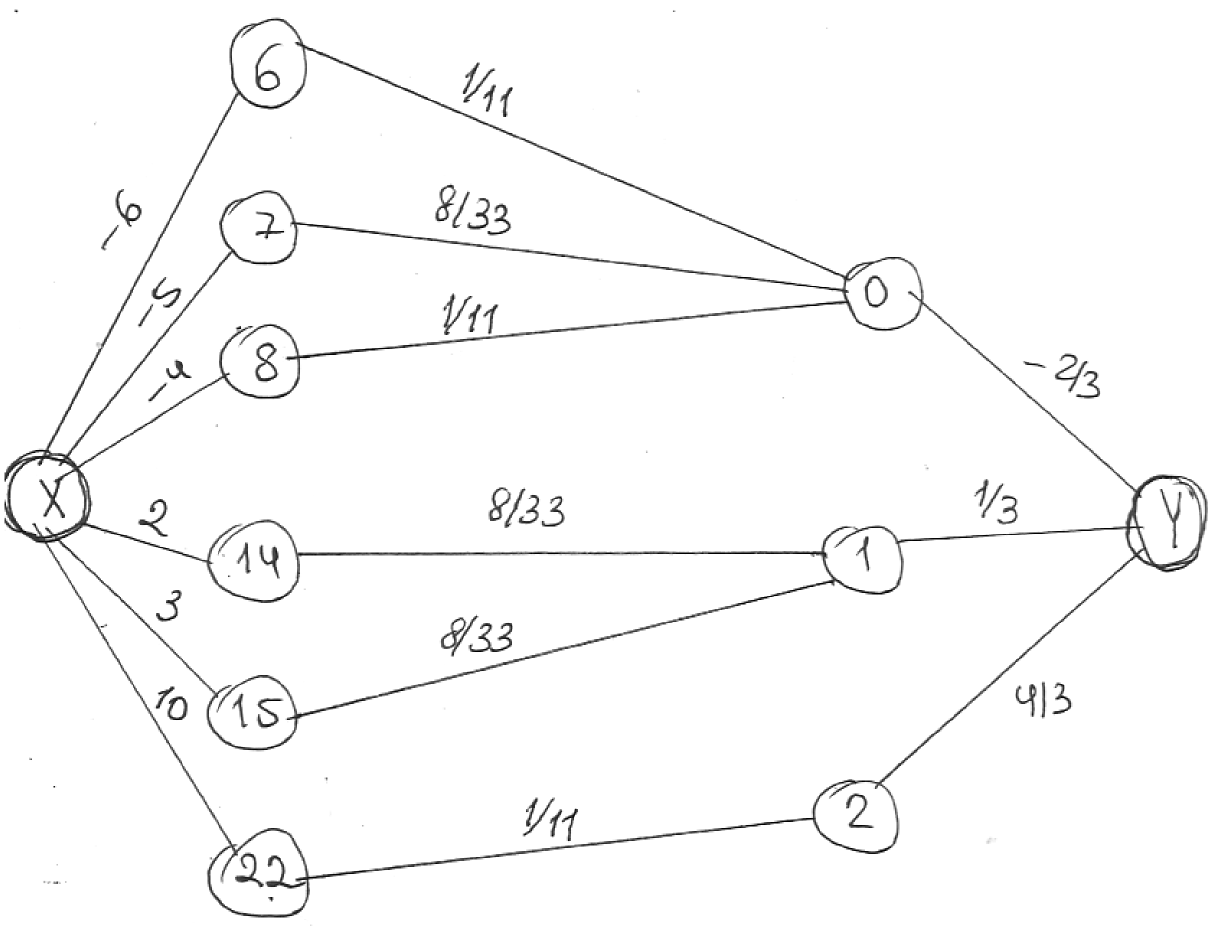
y_i	0	1	2
p_i	14/33	16/33	1/11

Проверим, зависимы ли эти величины. Случайные величины X и Y зависимы, так как, например, $P(X=6, Y=1) = 0 \neq \frac{1}{11} \cdot \frac{16}{33} = P(X=6) \cdot P(Y=1)$.

Напишем функцию распределения для (X, Y) в виде таблицы. В верхней строке интервалы для значений Y, в левом столбце – интервалы для значений X.

	<0	0-1	1-2	>2
<6	0	0	0	0
6-7	1/11	1/11	1/11	1/11
7-8	1/3	1/3	1/3	1/3
8-14	14/33	14/33	14/33	14/33
14-15	0	14/33	2/3	2/3
15-22	0	2/3	10/11	10/11
>22	0	10/11	10/11	1

Построим ковариационный граф. Для простоты опустим ребра, для которых вероятность равна нулю.



Посчитаем ковариацию (X,Y). Найдем необходимые величины:

$M(X)=\sum x_i p_i = 12$, $M(Y)=\sum y_i p_i = \frac{2}{3}$, $M(XY)=\sum x_i y_j p_{ij} = 11\frac{1}{33}$.

Тогда $\operatorname{cov}(X,Y)=M(XY)-M(X)\cdot M(Y)=11\frac{1}{33}-12\cdot\frac{2}{3}=\frac{100}{33}$.

Также ковариацию можно подсчитать как вес графа:

$$\operatorname{cov}(X,Y)=-6\cdot\frac{1}{11}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-5\cdot\frac{8}{33}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-4\cdot\frac{1}{11}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+2\cdot\frac{8}{33}\cdot\frac{1}{3}+$$
$$+3\cdot\frac{8}{33}\cdot\frac{1}{3}+10\cdot\frac{1}{11}\cdot\frac{4}{3}=\frac{100}{33}.$$

Напишем ковариационную матрицу. Для этого вычислим также дисперсии величин X и Y.

$$D(X)=\sum x_i^2 p_i-(M(X))^2=167\frac{1}{33}-12^2=23\frac{1}{33}=\frac{760}{33},$$

$$D(Y)=\sum y_i^2 p_i-(M(Y))^2=\frac{28}{33}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{40}{99}.$$

Получаем матрицу:

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\begin{pmatrix} \frac{760}{33} & \frac{100}{33} \\ \frac{100}{33} & \frac{40}{99} \end{pmatrix}.$$

Посчитаем корреляцию (X,Y).

$$r(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{\frac{100}{33}}{\sqrt{\frac{760}{33}\cdot\frac{40}{99}}}=\frac{5}{38}\sqrt{57}\approx 0,993.$$

Напишем корреляционную матрицу.

$$R(X,Y)=\begin{pmatrix} 1 & 0,993 \\ 0,993 & 1 \end{pmatrix}.$$

Расчетные таблицы:

x_i	p_i	$x_i p_i$	$x_i^2 p_i$
6	1/11	6/11	3 3/11
7	8/33	1 23/33	11 29/33
8	1/11	8/11	5 9/11
14	8/33	3 13/33	47 17/33
15	8/33	3 7/11	54 6/11
22	1/11	2	44
Сумма	**1**	**12**	**167 1/33**

y_i	0	1	2	**Сумма**
p_i	14/33	16/33	1/11	**1**
$y_i p_i$	0	16/33	2/11	**2/3**
$y_i^2 p_i$	0	16/33	4/11	**28/33**