Метод наибольшего правдоподобия для непрерывного распределения

Задание.
Методом максимального правдоподобия найдите оценку параметра θ, если плотность имеет вид $p(x,\theta)=\frac{2x^3}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(x^4-\theta\right)^2}{2}}$ и по наблюдениям

1.4 1.5 3.2 1.4 2.5 3.4 3.1 2.4 3.8 2.6

Решение. Оценим параметр θ методом максимального правдоподобия
Функция правдоподобия имеет вид

$$L(x_1,...,x_n,\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{2x_i^3}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(x_i^4-\theta\right)^2}{2}}=\frac{2^n}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n}\prod_{i=1}^{n}x_i^3e^{-\frac{\left(x_i^4-\theta\right)^2}{2}}=\frac{2^n}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^3\right)e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(x_i^4-\theta\right)^2}{2}}$$

Логарифмируем

$$\ln L(x_1,...,x_n,\theta)=\ln\frac{2^n}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^3\right)e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(x_i^4-\theta\right)^2}{2}}=\ln 2^n+\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^3\right)+\ln e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(x_i^4-\theta\right)^2}{2}}-\ln\left(\sqrt{2\pi}\right)^n=$$

$$=\ln 2^n+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i^3-\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(x_i^4-\theta\right)^2}{2}-\ln\left(\sqrt{2\pi}\right)^n$$

Найдем частную производную по параметру θ

$$\frac{\partial\ln L(x_1,...,x_n,\theta)}{\partial\theta}=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\ln 2^n+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i^3-\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(x_i^4-\theta\right)^2}{2}-\ln\left(\sqrt{2\pi}\right)^n\right)=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\theta-x_i^4\right)^2}{2}\right)=-\sum_{i=1}^{n}\frac{2\left(\theta-x_i^4\right)}{2}=-\sum_{i=1}^{n}\left(\theta-x_i^4\right).$$

Приравняем производную к нулю и найдем выражение для оценки:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\theta-x_i^4\right)=0$$

$$\theta n-\sum_{i=1}^{n}x_i^4=0$$

$$\theta=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^4}{n}$$

Вычислим значение параметра θ по выборке:

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^4}{n} = \frac{1.4^4 + 1.5^4 + 3.2^4 + 1.4^4 + 2.5^4 + 3.4^4 + 3.1^4 + 2.4^4 + 3.8^4 + 2.6^4}{10} = 67.01$$