# Пример решения задачи: криволинейные интегралы

ЗАДАНИЕ.

*Вычислить интеграл*

$$\int_L z^2 x dx + (z + x + y)dy + y^2 z dz,$$

*где* $L$ – *кривая* $x^2 + y^2 = ax,\ x^2 + y^2 = z^2$, *положительно ориентированная на внешней стороне цилиндра.*

РЕШЕНИЕ. Заданная кривая представляет собой пересечение цилиндра с конусом. Параметризуем ее.

Параметризация цилиндра будет выглядеть так:

$$\begin{cases} x = a(1 + \cos t) \\ y = a\sin t \\ z = z \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad z \in R.$$

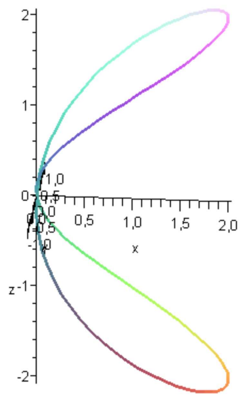
Подставим в уравнение конуса:

$$z^2 = x^2 + y^2 = a^2\left(1 + 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t\right) = 2a^2(1 + \cos t) = 4a^2\cos^2\frac{t}{2} \quad \Rightarrow \quad z = \pm 2a\cos\frac{t}{2}.$$

Таким образом,

$$L: \begin{cases} x = a(1 + \cos t) \\ y = a\sin t \\ z = \pm 2a\cos\frac{t}{2} \end{cases}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Искомая кривая в пространстве (при $a = 1$):




Следовательно, заданный интеграл можно представить в виде суммы определенных интегралов:

$$\int_L z^2xdx+(z+x+y)dy+y^2zdz=\int_0^{2\pi}4a^2\cos^2\frac{t}{2}\cdot a(1+\cos t)\cdot a(-\sin t)dt+$$

$$+\int_0^{2\pi}\left(a+a\cos t+a\sin t-2a\cos\frac{t}{2}\right)a\cos tdt+\int_0^{2\pi}a^2\sin^2 t\cdot\left(-2a\cos\frac{t}{2}\right)\cdot a\sin\frac{t}{2}dt+$$

$$+\int_0^{2\pi}4a^2\cos^2\frac{t}{2}\cdot a(1+\cos t)\cdot a(-\sin t)dt+$$

$$+\int_0^{2\pi}\left(a+a\cos t+a\sin t+2a\cos\frac{t}{2}\right)a\cos tdt+\int_0^{2\pi}a^2\sin^2 t\cdot\left(2a\cos\frac{t}{2}\right)\cdot\left(-a\sin\frac{t}{2}\right)dt=$$

$$=-8a^4\int_0^{2\pi}\cos^2\frac{t}{2}(1+\cos t)\sin tdt+2a^2\int_0^{2\pi}(1+\cos t+\sin t)\cos tdt-4a^4\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}dt\,.$$

Первый и третий интеграл от нечетных тригонометрических функций, поэтому при интегрировании они дают 0.

Вычисляем второй интеграл:

$$\int_0^{2\pi}(1+\cos t+\sin t)\cos tdt=\int_0^{2\pi}(1+\cos t+\sin t)\cos tdt=\sin t\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2}\sin^2 t\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\cos^2 tdt=$$

$$=0+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{2}t\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{2\pi}=\pi\,.$$

Следовательно,

$$\int_L z^2 x dx + (z + x + y)dy + y^2 z dz = 2a^2\pi .$$

***Ответ:*** $2a^2\pi$ .