Пример решения задачи: криволинейные интегралы

Задание.

Вычислить криволинейный интеграл второго рода, взятый вдоль ориентированной кривой L:

$\int\limits_L x^2dy - xydx$, *где* L – *часть кривой* $x^4 - y^4 = 6x^2y$ *от точки* $A = \left(-4\sqrt{2};\, 4\right)$ *до точки* $B = (0;\, 0)$.

Решение.

Выразим из уравнения кривой явно x:

$$x^4 - 6yx^2 - y^4 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = \frac{6y + \sqrt{36y^2 + 4y^4}}{2} = 3y + y\sqrt{9 + y^2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{3y + y\sqrt{9 + y^2}}\,.$$

Так как абсцисса точки A отрицательна, то

$$x(y) = -\sqrt{3y + y\sqrt{9 + y^2}}\,.$$

Возьмем y в качестве параметра. Точке A соответствует $y = 4$, точке B – $y = 0$.

Вычислим дифференциал

$$dx = x'(y)dy = -\frac{3 + \sqrt{9 + y^2} + y\dfrac{y}{\sqrt{9 + y^2}}}{2x(y)}\,dy\,.$$

Таким образом,

$$\int_L x^2dy - xydx = \int_4^0 \left[\left(3y + y\sqrt{9+y^2}\right) + y\cdot x(y)\cdot \frac{3+\sqrt{9+y^2}+y\dfrac{y}{\sqrt{9+y^2}}}{2x(y)} \right] dx =$$

$$= \int_4^0 \left[\left(3y + y\sqrt{9+y^2}\right) + \frac{1}{2}\left(3y + y\sqrt{9+y^2} + \frac{y^3}{\sqrt{9+y^2}}\right)\right] dy =$$

$$= \frac{9}{2}\int_4^0 ydy + \frac{3}{2}\int_4^0 y\sqrt{9+y^2}dy + \frac{1}{2}\int_4^0 y^3\left(9+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}dy = \frac{9}{4}y^2\Big|_4^0 + \frac{3}{4}\int_4^0 \sqrt{9+y^2}\,d\left(9+y^2\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_4^0 y^3\left(9+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}dy = -\frac{9}{4}\cdot 4^2 + \frac{3}{4}\frac{2}{3}\sqrt{\left(9+y^2\right)^3}\Big|_4^0 + \frac{1}{2}\int_4^0 y^3\left(9+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}dy = -36 + \frac{1}{2}(27-125) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_4^0 y^3\left(9+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}dy = -85 + \frac{1}{2}\int_4^0 y^3\left(9+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}dy.$$

Оставшийся интеграл вычисляем отдельно. Это дифференциальный бином. Выполним вторую замену $t^2 = 9 + y^2$, тогда $y = \left(t^2-9\right)^{\frac{1}{2}}, dy = t\left(t^2-9\right)^{-\frac{1}{2}}dt$. Пределы интегрирования $t_1^2 = 25 \Rightarrow t_1 = 5, t_2^2 = 9 \Rightarrow t_2 = 3$:

$$\int_4^0 y^3\left(9+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}dy = \int_5^3 \left(t^2-9\right)^{\frac{3}{2}} t^{-1}\cdot t\left(t^2-9\right)^{-\frac{1}{2}}dt = \int_5^3 \left(t^2-9\right)dt =$$

$$= \frac{1}{3}t^3\Big|_5^3 - 9t\Big|_5^3 = \frac{1}{3}(27-125) - 9(3-5) = -\frac{98}{3} + 18.$$

Искомый интеграл равен

$$\int_L x^2dy - xydx = -85 - \frac{49}{3} + 9 = -56 - \frac{49}{3} = -\frac{277}{3}.$$

Ответ: $-\dfrac{277}{3}$.