Пример решения задачи: криволинейные интегралы

Задание.

Найти координаты силы притяжения дугой астроиды $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, *единичной массы, помещенной в начале координат, если плотность астроиды в каждой ее точке равна кубу расстояния этой точки от начала координат.*

Решение.

Кривая L притягивает массу m с силой, проекции которой равны

$$x_0 = gm\int_L \frac{\rho(x,y)\cos\theta}{r^2(x,y)}ds, \quad y_0 = gm\int_L \frac{\rho(x,y)\sin\theta}{r^2(x,y)}ds,$$

где g − гравитационная постоянная, $m=1$ по условию, $\rho(x,y,z)=r^3(x,y,z)$, θ − полярный угол точки (x,y) (в нашем случае $\theta = t$).

Таким образом, проекция силы на ось абсцисс равна

$$x_0 = g\int_L \frac{\rho(x,y)\cos\theta}{r^2(x,y)}ds = g\int_L r(x,y,z)\cos t ds.$$

Дифференциал кривой равен

$$ds = \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt = \sqrt{(3a\cos^2 t\cdot(-\sin t))^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}dt =$$

$$= \sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t(\sin^2 t+\cos^2 t)}dt = 3a\cos t\sin t dt.$$

Расстояние от начала координат равно

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{a^2\cos^6 t + a^2\sin^2 t} = a\sqrt{\cos^6 t+\sin^2 t}.$$

Подставим полученные результаты:

$$x_0 = g\int_L r(x,y,z)\cos t ds = g\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sqrt{\cos^6 t + \sin^6 t}\cdot \cos t \cdot 3a\cos t \sin t dt =$$

$$= 3a^2 g\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\sqrt{\cos^6 t + \sin^6 t}\sin t dt.$$

Получили эллиптический интеграл – неэлементарная функция.