Пример решения задачи: криволинейные интегралы

ЗАДАНИЕ.

Найти моменты инерции относительно осей однородных дуг L плотности ρ.

$$L = \{(x, y): \quad 2y = x^2 + 1, 0 \le x \le 1\}.$$

РЕШЕНИЕ.

Момент инерции плоской кривой относительно осей вычисляется по формулам:

$$J_{ox} = \int_L y^2 \rho(x, y) ds, \qquad J_{oy} = \int_L x^2 \rho(x, y) ds,$$

где $\rho = \rho(x, y)$ – плотность кривой в точке (x, y).

По условию кривая однородная, поэтому можем считать, что плотность $\rho(x, y) = \rho$.

Кривая заданная явно уравнением $y(x) = \dfrac{x^2 + 1}{2}, x \in [0,1]$. Следовательно, искомые криволинейные интегралы можно представить в виде определенных интегралов:

$$J_{ox} = \int_L y^2 \rho(x, y) ds = \rho \int_0^1 y^2(x) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx,$$

$$J_{oy} = \int_L x^2 \rho(x, y) ds = \rho \int_0^1 x^2 \sqrt{1 + y'^2(x)} dx.$$

Вычислим дифференциал кривой:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2(x)} = \sqrt{1 + x^2} dx.$$

Вычисляем искомые моменты инерции:

$$J_{ox}=\rho\int_0^1\left(\frac{x^2+1}{2}\right)^2\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{\rho}{4}\int_0^1\left(1+x^2\right)^2\sqrt{1+x^2}\,dx.$$

Выполним замену $t=\sqrt{1+x^2}$, тогда $x=\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{2}}$, $dx=\frac{1}{2}\left(t^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2tdt=t\left(t^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}dt$, пределы интегрирования $t_1=\sqrt{1+0^2}=1, t_2=\sqrt{1+1^2}=\sqrt{2}$. Значит,

$$J_{ox}=\frac{\rho}{4}\int_0^1\left(1+x^2\right)^2\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{\rho}{4}\int_1^{\sqrt{2}}t^4\cdot t\cdot t\left(t^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{\rho}{4}\int_1^{\sqrt{2}}t^6\left(t^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}dt.$$

Получили дифференциальный бином. Делаем третью замену $z^2=-\frac{1}{t^2}+1 \quad\Rightarrow$

$\Rightarrow\quad \frac{1}{t^2}=1-z^2 \quad\Rightarrow\quad t=\left(1-z^2\right)^{-\frac{1}{2}}, dt=-\frac{1}{2}\left(1-z^2\right)^{-\frac{3}{2}}(-2z)dz=z\left(1-z^2\right)^{-\frac{3}{2}}dz$. Пределы интегрирования $z_1^2=-1+1=0\Leftrightarrow z_1=0,\quad z_2^2=-\frac{1}{2}+1 \quad\Rightarrow\quad z_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$J_{ox}=\frac{\rho}{4}\int_1^{\sqrt{2}}t^6\left(t^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{\rho}{4}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(1-z^2\right)^{-3}\left(\frac{1}{1-z^2}-1\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot z\left(1-z^2\right)^{-\frac{3}{2}}dz=$$

$$=\frac{\rho}{4}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(1-z^2\right)^{-3}z^{-1}\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot z\left(1-z^2\right)^{-\frac{3}{2}}dz=\frac{\rho}{4}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(1-z^2\right)^{-4}dz=\frac{\rho}{4}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\left(1-z^2\right)^4}dz.$$

Вычислим отдельно интеграл

$$\int\frac{dz}{\left(1-z^2\right)^4}$$

методом Остроградского. Решение будем искать в виде:

$$\int\frac{dz}{\left(1-z^2\right)^4}=\frac{Az^5+Bz^4+Cz^3+Dz^2+Ez+F}{\left(1-z^2\right)^3}+\int\frac{Nz+M}{1-z^2}dz.$$

Дифференцируем обе части:

$$\frac{1}{\left(1-z^2\right)^4}=\frac{5Az^4+4Bz^3+3Cz^2+2Dz+E}{\left(1-z^2\right)^3}-\frac{\left(Az^5+Bz^4+Cz^3+Dz^2+Ez+F\right)\cdot 3\left(1-z^2\right)^2\cdot(-2z)}{\left(1-z^2\right)^6}+$$

$$+\frac{Nz+M}{1-z^2}\quad\Rightarrow\quad 1=\left(5Az^4+4Bz^3+3Cz^2+2Dz+E\right)\left(1-z^2\right)+6z\left(Az^5+Bz^4+Cz^3+Dz^2+Ez+F\right)+$$

$$+(Nz+M)\left(1-3z^2+3z^4-z^6\right)=-Nz^7+(-5A+6A-M)z^6+(-4B+6B+3N)z^5+$$

$$+(5A-3C+6C+3M)z^4+(4B-2D+6D-3N)z^3+(3C-E+6E-3M)z^2+(2D+6F+N)z+$$

$$+E+M\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}N=0\\A-M=0\\2B+3N=0\\5A+3C+3M=0\\4B+4D-3N=0\\3C+5E-3M=0\\2D+6F+N=0\\E+M=1\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}N=B=D=F=0\\A=M\\E=1-M\\3C+8M=0\\-8M+5-5M-3M=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}N=B=D=F=0\\M=\dfrac{5}{16}\\A=\dfrac{5}{16}\\C=-\dfrac{8}{3}M=-\dfrac{5}{6}\\E=\dfrac{11}{16}\end{cases}.$$

Таким образом,

$$\int\frac{dz}{\left(1-z^2\right)^4}=\frac{1}{48}\frac{15z^5-40z^3+33z}{\left(1-z^2\right)^3}+\frac{5}{16}\int\frac{dz}{1-z^2}=$$

$$=\frac{1}{48}\frac{15z^5-40z^3+33z}{\left(1-z^2\right)^3}+\frac{5}{32}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|+C.$$

Вычисляем интеграл

$$J_{ox}=\frac{\rho}{4}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\left(1-z^2\right)^4}\,dz=\frac{\rho}{192}\left.\frac{15z^5-40z^3+33z}{\left(1-z^2\right)^3}\right|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\frac{5\rho}{128}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=$$

$$=\frac{\rho}{192}\left(\frac{15\cdot\frac{1}{4\sqrt{2}}-40\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}+33\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}\right)+\frac{5\rho}{128}\left(\ln\left|\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}+1}{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}\right|-\ln 1\right)=$$

$$=\frac{\rho}{192}\cdot 8\cdot\left(\frac{15}{4\sqrt{2}}-\frac{20}{\sqrt{2}}+\frac{33}{\sqrt{2}}\right)+\frac{5\rho}{128}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\rho}{24}\frac{15-80+132}{4\sqrt{2}}+$$

$$+\frac{5\rho}{128}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{5\rho}{128}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)=\frac{\rho}{24}\frac{67}{4\sqrt{2}}+\frac{5\rho}{128}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{5\rho}{128}\ln\frac{1}{1+\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\rho}{24}\cdot\frac{67\sqrt{2}}{8}+\frac{5\rho}{128}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\frac{5\rho}{128}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)=\frac{\rho}{192}\left(67\sqrt{2}+15\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right).$$

Вычисляем момент относительно оси Oy:

$$J_{oy}=\rho\int_0^1 x^2\sqrt{1+y'^2(x)}dx=\rho\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^2}dx.$$

Имеем дифференциальный бином. Выполним третью замену $t^2=\frac{1}{x^2}+1 \quad\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad x=\left(t^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad dx=-t\left(t^2-1\right)^{-\frac{3}{2}}dt.$$

Пределы интегрирования $t_1^2=+\infty\Leftrightarrow t_1=+\infty, t_2^2=\frac{1}{1}+1=2\Rightarrow t_2=\sqrt{2}$. Таким образом, приходим к несобственному интегралу:

$$\rho\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^2}dx=-\rho\int_{+\infty}^{\sqrt{2}}\left(t^2-1\right)^{-1}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{t^2-1}}\cdot t\left(t^2-1\right)^{-\frac{3}{2}}dt=$$

$$=\rho\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\left(t^2-1\right)^{-1}\cdot t\cdot\left(t^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot t\left(t^2-1\right)^{-\frac{3}{2}}dt=\rho\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{t^2dt}{\left(t^2-1\right)^3}.$$

Вычислим неопределенный интеграл

$$\int \frac{t^2 dt}{\left(t^2-1\right)^3}$$

методом Остроградского. Решение будем искать в виде

$$\int \frac{t^2 dt}{\left(t^2-1\right)^3} = \frac{At^3+Bt^2+Ct+D}{\left(t^2-1\right)^2} + \int \frac{Et+F}{t^2-1}dt .$$

Дифференцируем:

$$\frac{t^2}{\left(t^2-1\right)^3} = \frac{3At^2+2Bt+C}{\left(t^2-1\right)^2} - \frac{\left(At^3+Bt^2+Ct+D\right)\cdot 2\left(t^2-1\right)\cdot 2t}{\left(t^2-1\right)^4} + \frac{Et+F}{t^2-1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t^2 = \left(3At^2+2Bt+C\right)\left(t^2-1\right) - 4t\left(At^3+Bt^2+Ct+D\right) + \left(Et+F\right)\left(t^4-2t^2+1\right) =$$

$$= Et^5 + \left(3A-4A+F\right)t^4 + \left(-4B-2E\right)t^3 + \left(-3A+C-4C-2F\right)t^2 + \left(2B-4D+E\right)t - C + F \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E=0 \\ -A+F=0 \\ -4B-2E=0 \\ -3A-3C-2F=1 \\ 2B-4D+E=0 \\ F-C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E=B=D=0 \\ A=F \\ C=F \\ -3F-3F-2F=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=C=F=-\dfrac{1}{8} \\ B=D=E=0 \end{cases}.$$

Значит,

$$\int \frac{t^2 dt}{\left(t^2-1\right)^3} = -\frac{1}{8}\frac{t^3+t}{\left(t^2-1\right)^2} - \frac{1}{8}\int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{16}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{8}\frac{t^3+t}{\left(t^2-1\right)^2} + C .$$

Значение на верхнем пределе равно:

$$\lim_{\xi\to+\infty}\left(\frac{1}{16}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{8}\frac{t^3+t}{\left(t^2-1\right)^2}\right) = \frac{1}{16}\ln 1 - \frac{1}{8}\cdot 0 = 0 .$$

Значение на нижнем пределе равно

$$\frac{1}{16}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right| - \frac{1}{8}\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{2}}{(2-1)^2} = \frac{1}{8}\ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \frac{3\sqrt{2}}{8} .$$

Таким образом,

$$J_{oy} = \rho\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{t^2dt}{\left(t^2-1\right)^3} = \rho\left[0-\left(\frac{1}{8}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{3\sqrt{2}}{8}\right)\right] = \rho\frac{3\sqrt{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{8}.$$

Ответ: $J_{ox} = \dfrac{\rho}{192}\left(67\sqrt{2}+15\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right),\quad J_{oy} = \rho\dfrac{3\sqrt{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{8}.$