

Решение задачи по криволинейным интегралам скачано с

https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=makrint

(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

Пример: криволинейный интеграл 1-го рода

ЗАДАНИЕ.

Вычислить криволинейный интеграл I рода

$$\int_L y^2 dl,$$

L - арка циклоиды $\begin{cases} x = (t - \sin t)/2, \\ y = (1 - \cos t)/2, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

РЕШЕНИЕ.

Найдем производные:

$$x' = ((t - \sin t)/2)' = (1 - \cos t)/2.$$

$$y' = ((1 - \cos t)/2)' = \sin t/2.$$

$$x'^2 + y'^2 = \frac{1}{4}((1 - \cos t)^2 + \sin^2 t) = \frac{1}{4}(1 + \cos^2 t - 2\cos t + \sin^2 t) =$$

$$= \frac{1}{4}(2 - 2\cos t) = \frac{1}{2}(1 - \cos t) = \sin^2 \frac{t}{2}.$$

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}} dt = \sin \frac{t}{2} dt.$$

Тогда интеграл равен:

$$\begin{aligned} \int_L y^2 dl &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos t}{2} \right)^2 \sin \frac{t}{2} dt = \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 \frac{t}{2} \right)^2 \sin \frac{t}{2} dt = \int_0^{2\pi} \sin^5 \frac{t}{2} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2} \right)^2 \sin \frac{t}{2} dt = \left| \begin{array}{l} z = \cos \frac{t}{2}, \\ -2dz = \sin \frac{t}{2} dt \end{array} \right| = -2 \int (1 - z^2)^2 dz = -2 \int (1 - 2z^2 + z^4) dz = \\ &= -2 \left(z - \frac{2}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 \right) \Big|_0^{2\pi} = -2 \left(\cos \frac{t}{2} - \frac{2}{3} \cos^3 \frac{t}{2} + \frac{1}{5} \cos^5 \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= -2 \left(\cos \pi - \frac{2}{3} \cos^3 \pi + \frac{1}{5} \cos^5 \pi \right) + 2 \left(\cos 0 - \frac{2}{3} \cos^3 0 + \frac{1}{5} \cos^5 0 \right) = \\ &= -2 \left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5} \right) + 2 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{32}{15}. \end{aligned}$$