Пример: криволинейный интеграл 1-го рода

ЗАДАНИЕ.

Вычислить криволинейный интеграл I рода

$$\int_L y^2 dl,$$

L - *арка циклоиды* $\begin{cases} x=(t-\sin t)/2, \\ y=(1-\cos t)/2, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$

РЕШЕНИЕ.

Найдем производные:

$$x' = \left((t-\sin t)/2\right)' = (1-\cos t)/2.$$

$$y' = \left((1-\cos t)/2\right)' = \sin t/2.$$

$$x'^2 + y'^2 = \frac{1}{4}\left((1-\cos t)^2 + \sin^2 t\right) = \frac{1}{4}\left(1+\cos^2 t - 2\cos t + \sin^2 t\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(2-2\cos t) = \frac{1}{2}(1-\cos t) = \sin^2\frac{t}{2}.$$

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2}dt = \sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}dt = \sin\frac{t}{2}dt.$$

Тогда интеграл равен:

$$\int_L y^2 dl = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos t}{2}\right)^2 \sin\frac{t}{2}dt = \int_0^{2\pi}\left(\sin^2\frac{t}{2}\right)^2 \sin\frac{t}{2}dt = \int_0^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)^2 \sin\frac{t}{2}dt = \left| \begin{matrix} z=\cos\frac{t}{2}, \\ -2dz = \sin\frac{t}{2}dt \end{matrix} \right| = -2\int\left(1-z^2\right)^2 dz = -2\int\left(1-2z^2+z^4\right)dz =$$

$$= -2\left(z - \frac{2}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5\right) = -2\left(\cos\frac{t}{2} - \frac{2}{3}\cos^3\frac{t}{2} + \frac{1}{5}\cos^5\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= -2\left(\cos\pi - \frac{2}{3}\cos^3\pi + \frac{1}{5}\cos^5\pi\right) + 2\left(\cos 0 - \frac{2}{3}\cos^3 0 + \frac{1}{5}\cos^5 0\right) =$$

$$= -2\left(-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right) + 2\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right) = \frac{32}{15}.$$