Пример: независимость значения криволинейного интеграла от пути интегрирования

Задание.

Проверить, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования и найти его значение.

$$\int_{(1;2)}^{(3;1)} (2xy-1)dx+(x^2-2y)dy$$

Решение.

1) Пусть интегрирование ведется по прямой, соединяющей точки $A(1,2)$ и $B(3,1)$, то есть по прямой:

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-2}{1-2},$$
$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1},$$
$$-x+1=2y-4,$$
$$2y=-x+5,$$
$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}.$$

То есть $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$, $dy=-\frac{1}{2}dx$, $x=[1;3]$. Получаем:

$$\int_{(1;2)}^{(3;1)} (2xy-1)dx+(x^2-2y)dy=\int_1^3\left[2x\left(-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right)-1+\left(\frac{-1}{2}\right)\left(x^2-2\left(-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right)\right)\right]dx=$$
$$=\int_1^3\left[-x^2+5x-1-\frac{1}{2}\left(x^2+x-5\right)\right]dx=\int_1^3\left[-x^2+5x-1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right]dx=\int_1^3\left[-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x+\frac{3}{2}\right]dx=$$
$$=\left(-\frac{1}{2}x^3+\frac{9}{4}x^2+\frac{3}{2}x\right)\Bigg|_1^3=\left(-\frac{1}{2}3^3+\frac{9}{4}3^2+\frac{9}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}+\frac{9}{4}+\frac{3}{2}\right)=8.$$

2) Пусть интегрирование ведется по ломаной ACB, соединяющей точки $A(1,2)$ и $B(3,1)$, где $C(1,1)$.

Отрезок AC, $x=1,\ dx=0$, $y\in[2;1]$. Получаем:

$$\int_{AC}(2xy-1)dx+(x^2-2y)dy=\int_2^1(1-2y)\,dy=\left(y-y^2\right)\Big|_2^1=-(2-4)=2.$$

Отрезок CB, $y=1$, $dy=0$, $x\in[1;3]$. Получаем:

$$\int_{CB}(2xy-1)dx+(x^2-2y)dy=\int_1^3(2x-1)\,dy=\left(x^2-x\right)\Big|_1^3=9-3=6.$$

Сумма

$$\int_{(1;2)}^{(3;1)}(2xy-1)dx+(x^2-2y)dy=$$

$$=\int_{AC}(2xy-1)dx+(x^2-2y)dy+\int_{CB}(2xy-1)dx+(x^2-2y)dy=2+6=8.$$

Результаты одинаковые.