Пример решения задачи: криволинейные интегралы

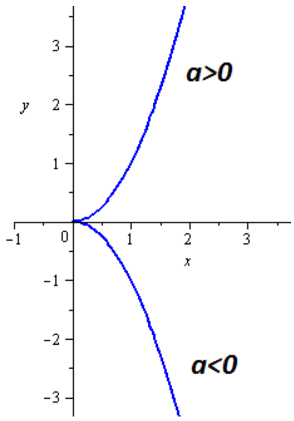
Задание.

Вычислить криволинейный интеграл первого рода по указанной кривой L:

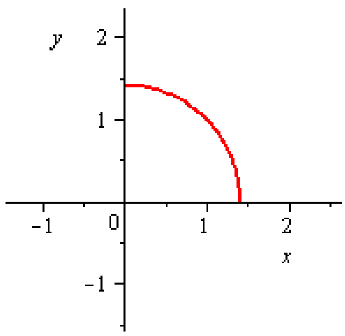
$$\int_L 4xyds, \quad L=\left\{(x,y): \quad y=\min\left(\frac{x^2}{a},\sqrt{2a^2-x^2}\right), \quad x\ge 0\right\}.$$

Решение.

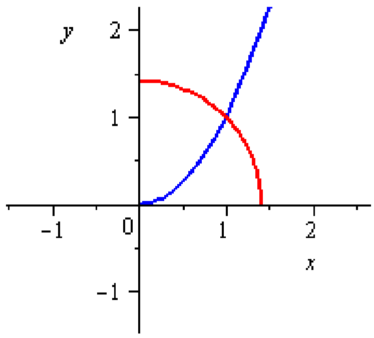
Определим вид кривой L. Кривая $y_1=\frac{x^2}{a}, \quad x\ge 0$ определяет параболу (при $a>0$ ветви направлены вверх, при $a<0$ − вниз):



Кривая $y_2=\sqrt{2a^2-x^2}$, $x\ge 0$ задает четверть окружности радиуса $\sqrt{2}|a|$ с центром в начале координат, расположенной в первой четверти:



Таким образом, если параметр a будет отрицательным, то заданная кривая L не будет ограниченной. Значит, $a>0$. Кривые y_1, y_2 выглядит так:



Найдем координаты точки пересечения линий y_1 и y_2 аналитически:

$$\frac{x^2}{a}=\sqrt{2a^2-x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x^4=2a^4-a^2x^2 \quad \Rightarrow \quad x^4+a^2x^2-2a^4=0.$$

Получили биквадратное уравнение. Положим $t=x^2$, тогда

$$t^2+a^2t-2a^4=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t_1=\dfrac{-a^2-\sqrt{a^4+8a^4}}{2}=\dfrac{-a^2-3a^2}{2}=-2a^2<0 \\ t_2=\dfrac{-a^2+3a^2}{2}=a^2 \end{cases}.$$

Первый корень отбрасываем, так как $t=x^2>0$. Значит, $t=x^2=a^2 \quad \Rightarrow \quad x=a$. Найдем ординату точки пересечения:

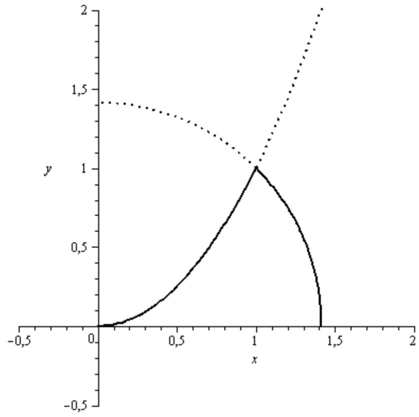
$$y=\frac{x^2}{a}=\frac{a^2}{a}=a.$$

Кривые пересекаются в точке $(a;a)$.

На отрезке $[0,a]$ часть окружности лежит выше параболы, значит, тут $y_1<y_2 \quad \Rightarrow \quad y(x)=\min(y_1,y_2)=y_1$.

На полуинтервале $\left(a,\sqrt{2}a\right]$ окружность лежит ниже параболы, значит, тут $y_1>y_2 \quad \Rightarrow \quad y(x)=\min(y_1,y_2)=y_2$.

Искомая кривая выглядит так:



Введем обозначения:

$L = L_1 \cup L_2$, где $L_1 = \left\{ (x, y): \quad y(x) = \dfrac{x^2}{a}, \quad x \ge 0 \right\}$, $\quad L_1 = \left\{ (x, y): \quad y(x) = \sqrt{2a^2 - x^2}, \quad x \ge 0 \right\}$.

Следовательно, заданный интеграл можно представить в виде суммы интегралов:

$$\int_L 4xyds = \int_{L_1} 4xyds + \int_{L_2} 4xyds .$$

На L_1 дифференциал кривой равен

$$ds = \sqrt{1 + y_1'^2(x)}dx = \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{a}\right)^2} dx = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + 4x^2} dx .$$

Первый интеграл равен

$$\int_{L_1} 4xyds = 4\int_0^a x \cdot \frac{x^2}{a} \cdot \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + 4x^2} dx = \frac{4}{a^2}\int_0^a x^3\sqrt{a^2 + 4x^2} dx .$$

Выполним замену $t = \sqrt{a^2 + 4x^2}$, тогда $x = \frac{1}{2}\left(t^2 - a^2\right)^{\frac{1}{2}}$,

$dx = \frac{1}{4}\left(t^2 - a^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2tdt = \frac{1}{2}\left(t^2 - a^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot tdt$, пределы интегрирования $t_1 = \sqrt{a^2} = a, t_2 = a\sqrt{5}$:

$$\frac{4}{a^2}\int_0^a x^3\sqrt{a^2 + 4x^2} dx = \frac{4}{a^2}\int_a^{a\sqrt{5}} \frac{1}{8}\left(t^2 - a^2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot t \cdot \frac{1}{2}\left(t^2 - a^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot tdt =$$

$$=\frac{1}{4a^2}\int_a^{a\sqrt{5}} t^2\left(t^2-a^2\right)dt=\frac{1}{20a^2}t^5\Big|_a^{a\sqrt{5}}-\frac{1}{12}t^3\Big|_a^{a\sqrt{5}}=\frac{1}{20a^2}\left(a^5\cdot 25\sqrt{5}-a^5\right)-\frac{1}{12}\left(a^3\cdot 5\sqrt{5}-a^3\right)=$$

$$=\frac{5\sqrt{5}}{4}a^3-\frac{1}{20}a^3-\frac{5\sqrt{5}}{12}a^3+\frac{1}{12}a^3=a^3\frac{15\sqrt{5}-5\sqrt{5}}{12}+\frac{5a^3-3a^3}{60}=a^3\frac{5\sqrt{5}}{6}+\frac{a^3}{30}.$$

На L_2 дифференциал кривой равен

$$ds=\sqrt{1+y_2'^2(x)}dx=\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{2a^2-x^2}}\right)^2}dx=\sqrt{1+\frac{x^2}{2a^2-x^2}}dx=\sqrt{\frac{2a^2-x^2+x^2}{2a^2-x^2}}dx=$$

$$=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2-x^2}}dx.$$

Второй интеграл равен

$$\int_{L_2}4xyds=4\int_a^{a\sqrt{2}} x\cdot\sqrt{2a^2-x^2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2-x^2}}dx=4a\sqrt{2}\int_a^{a\sqrt{2}}xdx=2a\sqrt{2}x^2\Big|_a^{a\sqrt{2}}=$$

$$=2a\sqrt{2}\left(2a^2-a^2\right)=2a^3\sqrt{2}.$$

Искомый интеграл равен

$$\int_L 4xyds=a^3\frac{5\sqrt{5}}{6}+\frac{a^3}{30}+2a^3\sqrt{2}=a^3\frac{25\sqrt{5}}{30}+\frac{a^3}{30}+\frac{60a^3\sqrt{2}}{30}=\frac{a^3}{30}\left(25\sqrt{5}+1+60\sqrt{2}\right).$$

Ответ: $\int_L 4xyds=\frac{a^3}{30}\left(25\sqrt{5}+1+60\sqrt{2}\right).$