Модели управления запасами

Пример решения

Динамическая задача управления производством и запасами

Рассматривается трёхэтапная система управления запасами с дискретной продукцией и динамическим детерминированным спросом. Заявки потребителей на продукцию на этапе j равны d_j единиц (j = 1, 2, 3). К началу первого этапа на складе имеется только y_1 единицы продукции. Затраты на хранение единицы продукции на этапе j равны h_j. Затраты на производство x_j единиц продукции на j-м этапе определяются функцией

$\varphi_j(x_j) = ax_j^2 + bx_j + c$, $j = 1,2,3$.

Требуется указать, сколько единиц продукции на отдельных этапах следует производить, чтобы заявки потребителей были удовлетворены, а общие затраты на производство и хранение за все три этапа были наименьшими. Для этого необходимо составить математическую модель динамической задачи управления производством и запасами и решить её методом динамического программирования, обосновывая каждый шаг вычислительного процесса. Исходные данные приведены для каждого варианта в прил. 4.

d_1	d_2	d_3	a	b	c	h_1	h_2	h_3	y_1
3	1	2	4	1	2	6	3	5	0

Решение:

Воспользовавшись рекуррентными соотношениями, последовательно вычисляем $F_1(\xi = y_2)$, $F_2(\xi = y_3)$, $F_3(\xi = y_4)$ и соответственно находим $x_1^*(\xi = y_2)$, $x_2^*(\xi = y_3)$, $x_3^*(\xi = y_4)$.

1 этап.

Положим k = 1. Тогда по формуле $F_1(\xi = y_2) = \min\limits_{x_1}\{ax_1^2 + bx_1 + c + h_1 y_2\}$ имеем:

$F_1(\xi = y_2) = \min\limits_{x_1}\{4x_1^2 + x_1 + 2 + 6y_2\}$.

Параметр состояния y_2 может принимать целые значения на отрезке от 0 до $d_2 + d_3 = 1+2 = 3$, т.е. $y_2 = 0, 1, 2, 3$.

Каждому значению параметра состояния должна отвечать определённая область изменения переменной x_1, характеризуемая условием $0 \le x_1 \le d_1 + y_2$.

На 1-м этапе получаем $0 \le x_1 \le 3 + y_2$. Однако на 1-м этапе объем производства x_1 не может быть меньше трёх, так как спрос d_1 =3, а исходный запас y_1= 0.

Из балансового уравнения $x_1 + y_1 - d_1 = y_2$ непосредственно следует, что объём производства связан со значением параметра состояния $\xi = y_2$ соотношением $x_1 = y_2 + d_1 - y_1 = y_2 + 3 - 0 = y_2 + 3$.

Если задан уровень запаса к началу первого этапа, то каждому значению y_2 отвечает единственное значение x_1, и потому $F_1(\xi = y_2) = \Omega_1(x_1, y_2)$.

Придавая y_2 различные целые значения от 0 до 3 и учитывая, что $x_1 = y_2 + 3$, находим:

$y_2 = 0$, $x_1 = 3$, $\Omega_1(3,0) = 4\cdot 3^2 + 3 + 2 + 6\cdot 0 = 41$;

$y_2 = 1$, $x_1 = 4$, $\Omega_1(4,1) = 4\cdot 4^2 + 4 + 2 + 6\cdot 1 = 76$;

$y_2 = 2$, $x_1 = 5$, $\Omega_1(5,2) = 4\cdot 5^2 + 5 + 2 + 6\cdot 2 = 119$;

$y_2 = 3$, $x_1 = 6$, $\Omega_1(6,3) = 4\cdot 6^2 + 6 + 2 + 6\cdot 3 = 170$.

Значения функции состояния $F_1(\xi)$ представлены в таблице:

$\xi = y_2$	0	1	2	3
$F_1(\xi = y_2)$	41	76	119	170
$x_1^*(\xi = y_2)$	3	4	5	6

2 этап. $k = 2$.

Табулируем функцию $F_2(\xi = y_3)$:

$$F_2(\xi=y_3)=\min_{x_2}\Omega_2(x_2,y_3)=\min_{x_2}\{ax_2^2+bx_2+c+h_2y_3+F_1(y_2)\}=\min_{x_2}\{4x_2^2+x_2+2+3y_3+F_1(y_2)\}.$$

Переменная x_2 может изменяться в пределах $0 \le x_2 \le d_2 + y_3 = 1 + y_3$, а y_3 принимает значения в пределах $0 \le y_3 \le d_3 = 2$, т.е. $y_3 = 0, 1, 2$.

Из балансового уравнения $x_2 + y_2 - d_2 = y_3$ следует, что

$y_2 = y_3 + d_2 - x_2 = y_3 + 1 - x_2$.

Придавая y_3 различные целые значения от 0 до 2, будем последовательно вычислять $\Omega_2(x_2,\xi)$, а затем определять $F_2(\xi)$ и $\tilde{x}_2(\xi)$.

Процесс табулирования приведён в таблице:

$\xi = y_3$	$0 \le x_2 \le 1 + y_3$	x_2	$y_2 = y_3 + 1 - x_2$	$\Omega_2(x_2,y_3)=4x_2^2+x_2+2+3y_3+F_1(y_2)$
$y_3 = 0$	$0 \le x_2 \le 1$	0	y_2=0+1–0=1	$\Omega_2(0,0)=4\cdot0^2+0+2+3\cdot0+F_1(1)=2+76=78$
		1	y_2=0+1–1=0	$\Omega_2(1,0)= 4\cdot1^2+1+2+3\cdot0+F_1(0)=7+41=48^*$
$y_3 = 1$	$0 \le x_2 \le 2$	0	y_2=1+1–0=2	$\Omega_2(0,1)=$ $4\cdot0^2+0+2+3\cdot1+F_1(2)=5+119=124$
		1	y_2=1+1–1=1	$\Omega_2(1,1)= 4\cdot1^2+1+2+3\cdot1+F_1(1)=10+76=86$
		2	y_2=1+1–2=0	$\Omega_2(2,1)=$

				$4\cdot2^2+2+2+3\cdot1+F_1(0)=30+41=71^*$
$y_3=2$	$0\le x_2\le 3$	0	y_2=2+1–0=3	$\Omega_2(0,2)=$ $4\cdot0^2+0+2+3\cdot2+F_1(3)=8+170=178$
		1	y_2=2+1–1=2	$\Omega_2(1,2)=$ $4\cdot1^2+1+2+3\cdot2+F_1(2)=13+119=132$
		2	y_2=2+1–2=1	$\Omega_2(2,2)=$ $4\cdot2^2+2+2+3\cdot2+F_1(1)=26+76=102$
		3	y_2=2+1–3=0	$\Omega_2(3,2)=$ $4\cdot3^2+3+2+3\cdot2+F_1(0)=47+41=88^*$

Наименьшие из полученных значений Ω_2 в таблице выделены.

Имеем: $F_2(0) = \Omega_2(1,0)= 48$, $F_2(1) = \Omega_2(2,1)= 71$, $F_2(2) = \Omega_2(3,2)= 88$.

<u>3 этап</u>. $k = 3$.

Табулируем функцию $F_3(\xi = y_4)$:

$$F_3(\xi=y_4)=\min_{x_3}\Omega_2(x_3,y_4)=\min_{x_3}\{ax_3^2+bx_3+c+h_3y_4+F_2(y_3)\}=\min_{x_3}\{4x_3^2+x_3+2+3y_4+F_2(y_3)\}$$

.

Вычисляем значение функции состояния только для одного значения аргумента $\xi = y_4$=0, так как не хотим оставлять продукцию в запас в конце исследуемого периода. Процесс вычислений приведён в таблице:

$\xi = y_4$	$0 \le x_3 \le d_3 + y_4$	x_3	$y_3 = y_4 + d_3 - x_3$	$\Omega_3(x_3, y_4) = 4x_3^2 + x_3 + 2 + h_3 y_4 + F_2(y_3)$
$y_4 = 0$	$0 \le x_3 \le 2$	0	$y_3=0+2–0=2$	$\Omega_2(0,0)=4\cdot 0^2+0+2+5\cdot 0+F_2(2)=2+88=90$
		1	$y_3=0+2–1=1$	$\Omega_2(1,0)= 4\cdot 1^2+1+2+5\cdot 0+F_2(1)=7+71=78$
		2	$y_3=0+2–2=0$	$\Omega_2(2,0)=$ $4\cdot 2^2+2+2+5\cdot 0+F_2(0)=20+48=68^*$

Наименьшее из полученных значений $F_3(\xi = y_4) = \min\limits_{x_3} \Omega_2(x_3, y_4) = 68$, причём минимум достигается при значении x_3, равном $x_3^*(\xi = y_4 = 0) = 2$.

Получили, что на последнем этапе необходимо выпускать 2 единицы продукции:

$x_3^* = 2$.

Находим предпоследнюю компоненту оптимального плана:

$y_3 = y_4 + d_3 - x_3 = 0 + 2 - 2 = 0$. В первой части таблицы предыдущего этапа находим выделенную строку для $y_3 = 0$. Имеем: $x_2^* = x_2^*(\xi = y_3 = 0) = 1$.

Находим x_1^*, учитывая, что $y_2 = y_3 + 1 - x_2 = 0 + 1 - 1 = 0$.

Имеем: $x_1^* = x_1^*(\xi = y_2 = 0) = 3$.

Таким образом, оптимальный план производства имеет вид:

$x_1^* = 3,\ \ x_2^* = 1,\ \ x_3^* = 2$.

Минимальные общие затраты составляют 68 единиц.

Самопроверка результатов

Этап	1	2	3	Итого за 3 этапа

Имеем продукции к началу месяца, шт.	$y_1=0$	$y_2=0$	$y_3=0$	
Производим в течение месяца, шт.	$x_1=3$	$x_2=1$	$x_3=2$	$x_1+x_2+x_3=6$
Отпускаем заказчикам, шт.	$d_1=3$	$d_2=1$	$d_3=2$	$d_1+d_2+d_3=6$
Остаток к концу месяца (храним в течение текущего месяца), шт.	$y_2=0$	$y_3=0$	$y_4=0$	
Затраты на производство, руб.	$\varphi(x_1)=41$	$\varphi(x_2)=7$	$\varphi(x_3)=20$	$\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\varphi(x_3)=68$
Затраты на хранение, руб.	$h_1y_2=0$	$h_2y_3=0$	0	$h_1y_2+h_2y_3=0$

Видим, что заявки потребителей на каждом этапе выполняются:

$y_1+x_1 \geq d_1$, $y_2+x_2 \geq d_2$, $y_3+x_3 \geq d_3$,

$0 + 3 = 3$, $0 + 1 = 1$, $0 + 2 = 2$.

Суммарный объем производства и имевшегося к началу первого этапа запаса продукции равен суммарной потребности:

$y_1+x_1+x_2+x_3=6$ и $d_1+d_2+d_3=6$.

При таком плане хранение продукции в течение всего периода не требуется, т.к. минимальные общие затраты получились при условии, что всё, что производится, сразу же потребляется.