

Тема: Разложение функции в ряд Лорана в кольце

Задание. Разложить данную функцию в ряд Лорана в заданном кольце комплексной плоскости. Указать область сходимости полученного ряда:

$$f(z) = \frac{1}{z+12}, \quad 5 < |z+5i| < 8.$$

Решение.

Представим $f(z)$ в виде:

$$f(z) = \frac{1}{z+12} = \frac{1}{z+5i-5i+12} = \frac{1}{12-5i} \cdot \frac{1}{1+\frac{z+5i}{12-5i}}.$$

Воспользуемся известным разложением

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \dots + (-1)^n z^n + \dots$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{12-5i} \left(1 - \frac{z+5i}{12-5i} + \frac{(z+5i)^2}{(12-5i)^2} - \dots + (-1)^n \frac{(z+5i)^n}{(12-5i)^n} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{12-5i} - \frac{z+5i}{(12-5i)^2} + \frac{(z+5i)^2}{(12-5i)^3} - \dots + (-1)^n \frac{(z+5i)^n}{(12-5i)^{n+1}} + \dots \end{aligned}$$

Данный ряд является рядом Тейлора, который сходится в данном кольце.