Тема: Круг сходимости ряда

Задание. *Для данных рядов определить круг сходимости и исследовать сходимость в данных точках.*

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(z-2)^n}{(n+1)^2}$, $z=0$, $z=2+\frac{i}{2}$, $z=2{,}1$.

Решение. Центр круга сходимости $z_0=2$, коэффициент при $(z-2)^n$,

$c_n=\frac{2^n}{(n+1)^2}$. Найдем радиус круга сходимости по формуле:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2^n}{(n+1)^2}:\frac{2^{n+1}}{(n+1+1)^2}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n(n+2)^2}{(n+1)^2 2^{n+1}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2}{(n+1)^2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(1+2/n)^2}{(1+1/n)^2}=\frac{1}{2}$$

Таким образом, ряд сходится в круге $|z-2|<1/2$.

Исследуем сходимость в конкретных точках.
1) $z=0$, подставляем, $|0-2|=2>1/2$, точка лежит вне круга, ряд расходится.

2) $z=2+\frac{i}{2}$, подставляем $|2+i/2-2|=1/2$. Точка лежит на границе области сходимости. Рассмотрим ряд в этой точке: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(2+i/2-2)^n}{(n+1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i)^n}{(n+1)^2}$.

Рассмотрим ряд из модулей, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$, он сходится по признаку сравнения со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+1/n)^2}=1\neq 0,\infty.$$

3) $z=2{,}1$, подставляем $|2{,}1-2|=0{,}1<1/2$. Точка лежит внутри круга, ряд в этой точке сходится абсолютно.