

## Задача с решением на тему «Ряды динамики» (общая статистика)

ЗАДАНИЕ.

1. На основе исходных данных своего варианта построить линейную диаграмму динамического ряда.

2. Рассчитать показатели динамики (цепные и базисные), результаты представить в таблице.

3. Произвести выравнивание исходного динамического ряда методами: укрупненных интервалов, скользящей средней, аналитического выравнивания по уравнению прямой.

4. На графике исходного динамического ряда построить выравненные данные по скользящей средней и по уравнению прямой.

5. Оценить устойчивость тенденции.

6. Сделать прогноз значения показателя на 2014 год.

После каждого пункта задания представить комментарии.

РЕШЕНИЕ.

Исходные данные представлены в табл. 1.

Таблица 1 – Урожайность рапса озимого по Российской Федерации (в хозяйствах всех категорий; центнеров с одного гектара убранной площади).

Год	Урожайность рапса озимого, ц/га
1999	13,0
2000	13,6
2001	16,4
2002	16,9
2003	10,2
2004	17,8
2005	17,7
2006	16,0
2007	15,6
2008	17,6
2009	18,2
2010	19,0
2011	17,7
2012	16,8

1. На основе исходных данных (табл. 1) построим линейную диаграмму динамического ряда.

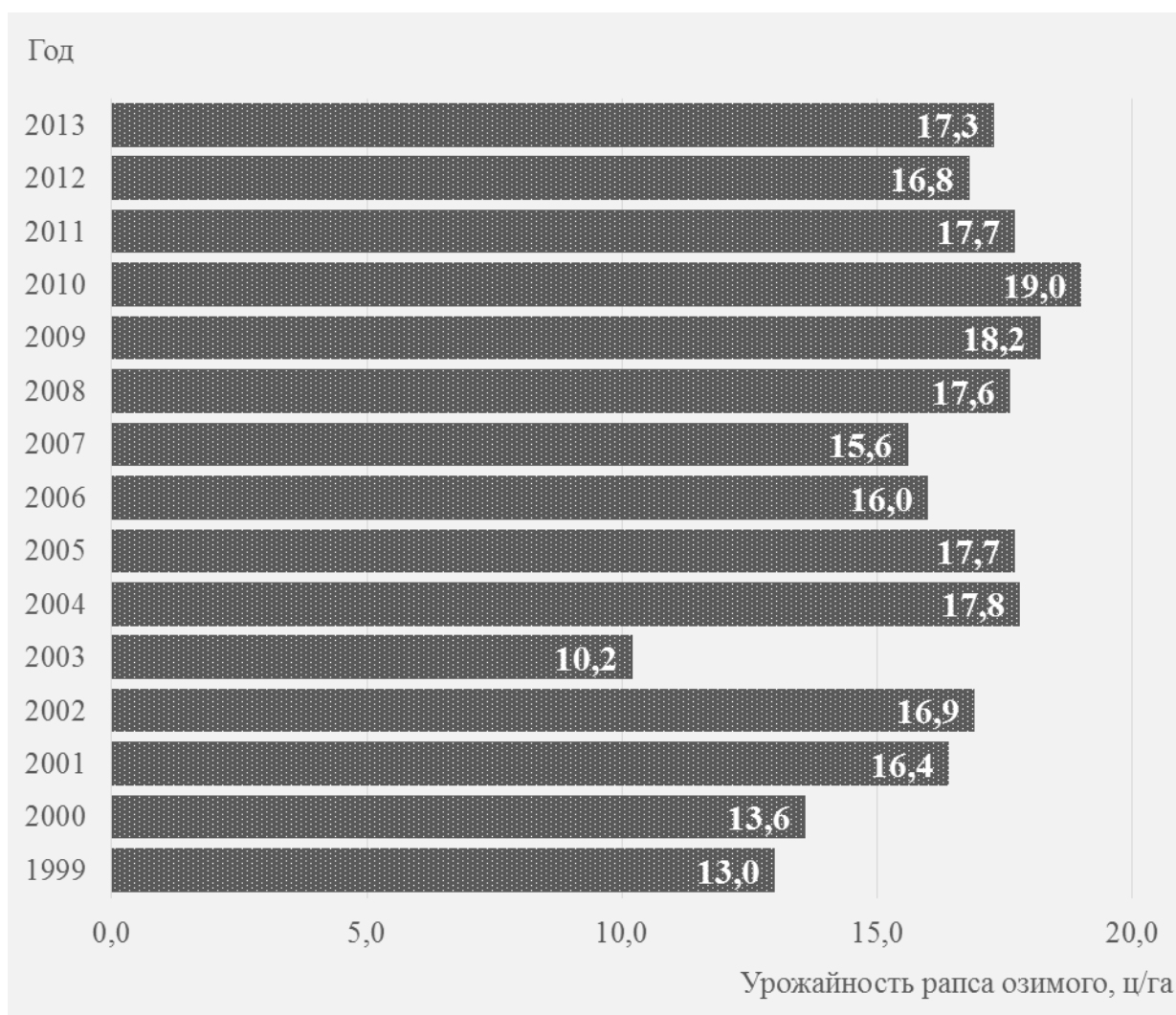


Рис. 1 – Динамика урожайности рапса озимого по Российской Федерации за 1999-2013 гг.

Анализ диаграммы позволяет сделать вывод о определенной степени колеблемости показателя урожайности рапса озимого. При этом, в 2003 г. Урожайность этой культуры была самой низкой – 10,2 ц/га. Самая высокая урожайность рапса озимого была в 2010 г. – 19,0 ц/га.

2. Рассчитаем показатели динамики (цепные и базисные) урожайности рапса озимого за 1999-2013 гг.

Абсолютный прирост  $\Delta_t$  характеризует абсолютный размер увеличения (или уменьшение) уровня ряда  $y_t$  за определенный временной интервал и исчисляется как разница уровней ряда:

$$\text{базисный прирост } \Delta_t = y_t - y_0; \text{ цепной прирост } \Delta_t = y_t - y_{t-1}.$$

Темп роста  $k_t$  показывает, во сколько раз уровень  $y_t$  больше (меньше) уровня, взятого за базу сравнения. Он представляет собой отношение уровней:

$$\text{базисный темп } k_t = \frac{y_t}{y_0} \text{ и цепной темп } k_t = \frac{y_t}{y_{t-1}}.$$

Темпы роста выражаются как в коэффициентах, так и в процентах.

Темп прироста функционально связан с темпом роста и всегда выражается в процентах:

$$T_t = 100(k_t - 1).$$

Он показывает, на сколько процентов уровень  $y_t$  больше (меньше) от базы сравнения.

Соотношением абсолютного прироста и темпа прироста определяется

$$\text{абсолютное содержание 1\% прироста: } A_t = \frac{\Delta_t}{T_t} = \frac{y_t - y_{t-1}}{100 \left( \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}} \right)} = \frac{y_{t-1}}{100}.$$

Результаты расчета цепных показателей динамики представлены в табл. 2-3.

Таблица 2 – Цепные показатели динамики урожайности рапса озимого

Год	Урожайность рапса озимого, ц/га	Абсолютный прирост, ц/га	Темп роста, %	Темп прироста, %	Абсолютное содержание одного процента прироста, ц/га
1999	13,0				
2000	13,6	0,6	104,615	4,615	0,130
2001	16,4	2,8	120,588	20,588	0,136
2002	16,9	0,5	103,049	3,049	0,164
2003	10,2	-6,7	60,355	-39,645	0,169
2004	17,8	7,6	174,510	74,510	0,102
2005	17,7	-0,1	99,438	-0,562	0,178
2006	16,0	-1,7	90,395	-9,605	0,177

2007	15,6	-0,4	97,500	-2,500	0,160
2008	17,6	2,0	112,821	12,821	0,156
2009	18,2	0,6	103,409	3,409	0,176
2010	19,0	0,8	104,396	4,396	0,182
2011	17,7	-1,3	93,158	-6,842	0,190
2012	16,8	-0,9	94,915	-5,085	0,177
2013	17,3	0,5	102,976	2,976	0,168

Таблица 3 – Базисные показатели динамики урожайности рапса озимого

Год	Урожайность рапса озимого, ц/га	Абсолютный прирост, ц/га	Темп роста, %	Темп прироста, %	Абсолютное содержание одного процента прироста, ц/га
1999	13,0				
2000	13,6	0,6	104,615	4,615	0,130
2001	16,4	3,4	126,154	26,154	0,136
2002	16,9	3,9	130,000	30,000	0,164
2003	10,2	-2,8	78,462	-21,538	0,169
2004	17,8	4,8	136,923	36,923	0,102
2005	17,7	4,7	136,154	36,154	0,178
2006	16,0	3,0	123,077	23,077	0,177
2007	15,6	2,6	120,000	20,000	0,160
2008	17,6	4,6	135,385	35,385	0,156
2009	18,2	5,2	140,000	40,000	0,176
2010	19,0	6,0	146,154	46,154	0,182
2011	17,7	4,7	136,154	36,154	0,190
2012	16,8	3,8	129,231	29,231	0,177
2013	17,3	4,3	133,077	33,077	0,168

По результатам расчетов показателей динамики можно сделать выводы о непостоянной динамике показателя, т.е., за рассматриваемый период урожайность рапса озимого то уменьшалась по сравнению с предыдущим годом, то увеличивалась (цепные показатели динамики).

Сделать однозначный вывод о наличии тенденции на основе исходных данных не представляется возможным.

По сравнению с 1999 г. каждый последующий год (за исключением 2003 г., когда урожайность рапса была ниже 1999 г.) урожайность рапса озимого была выше (базисные показатели динамики).

3. Поскольку по исходным данным сделать однозначный вывод о тенденции урожайности рапса озимого невозможно, произведем выравнивание исходного динамического ряда методом укрупненных интервалов – табл. 4. Для этого рассчитаем средние значения урожайности рапса озимого за три и за пять последовательных периодов. Выбор интервала в три и пять лет объясняется тем, что число наблюдаемых лет делится на три и на пять.

Таблица 4 – Выравнивание исходного динамического ряда методом укрупненных интервалов

Год	Урожайность рапса озимого, ц/га	Средняя урожайность рапса озимого за три года, ц/га	Средняя урожайность рапса озимого за пять лет, ц/га
1999	13,0	–	–
2000	13,6	14,33	14,02
2001	16,4	–	–
2002	16,9	–	–
2003	10,2	14,97	–
2004	17,8	–	–
2005	17,7	–	16,94
2006	16,0	16,43	–
2007	15,6	–	–
2008	17,6	–	–
2009	18,2	18,27	–
2010	19,0	–	17,80
2011	17,7	–	–
2012	16,8	17,27	–
2013	17,3	–	–

Используя интервал в три года мы наблюдаем тенденцию к увеличению, но из полученного ряда показателей выделяется последняя средняя, что ниже предыдущего показателя. Три средние, характеризующие динамику урожайности рапса озимого, показывают тенденцию к ее увеличению с течением времени.

Произведем выравнивание исходного динамического ряда методом скользящей средней – табл. 5.

Рассмотрим три интервала – три года, четыре года, пять лет.

Анализ ряда трехчленных скользящих средних не позволяет сделать однозначный вывод о наличии тенденции к увеличению, хотя она вырисовывается. Но при этом некоторые значения меньше предыдущих. В связи с этим мы рассмотрели четырех- и пятичленную скользящие средние. В результате мы получили более очевидную тенденцию к увеличению, но некоторые средние также оказались меньше предыдущих значений.

Таблица 5 – Выравнивание исходного динамического ряда методом скользящей средней

Год	Урожайность рапса озимого, ц/га	Трехчленная сумма	Трехчленная средняя	Четырехчленная сумма	Четырехчленная средняя	Центрированная средняя	Пятичленная сумма	Пятичленная средняя
1999	13,0	–	–	–	–	–	–	–
2000	13,6	43,0	14,33	59,9	14,98	–	–	–
2001	16,4	46,9	15,63	57,1	14,28	14,63	70,1	14,02
2002	16,9	43,5	14,50	61,3	15,33	14,80	74,9	14,98
2003	10,2	44,9	14,97	62,6	15,65	15,49	79,0	15,80
2004	17,8	45,7	15,23	61,7	15,43	15,54	78,6	15,72
2005	17,7	51,5	17,17	67,1	16,78	16,10	77,3	15,46
2006	16,0	49,3	16,43	66,9	16,73	16,75	84,7	16,94
2007	15,6	49,2	16,40	67,4	16,85	16,79	85,1	17,02
2008	17,6	51,4	17,13	70,4	17,60	17,23	86,4	17,28
2009	18,2	54,8	18,27	72,5	18,13	17,86	88,1	17,62
2010	19,0	54,9	18,30	71,7	17,93	18,03	89,3	17,86
2011	17,7	53,5	17,83	70,8	17,70	17,81	89,0	17,80
2012	16,8	51,8	17,27	–	–	–	–	–
2013	17,3	–	–	–	–	–	–	–

Наиболее четко тенденция к увеличению урожайности рапса озимого характеризуется центрированной средней, рассчитанной на основе четырехчленных средних.

Произведем выравнивание исходного динамического ряда методом аналитического выравнивания по уравнению прямой.

Динамика показателя урожайности рапса озимого за период с 1999 по 2013 гг. показана на графике (рис. 2).

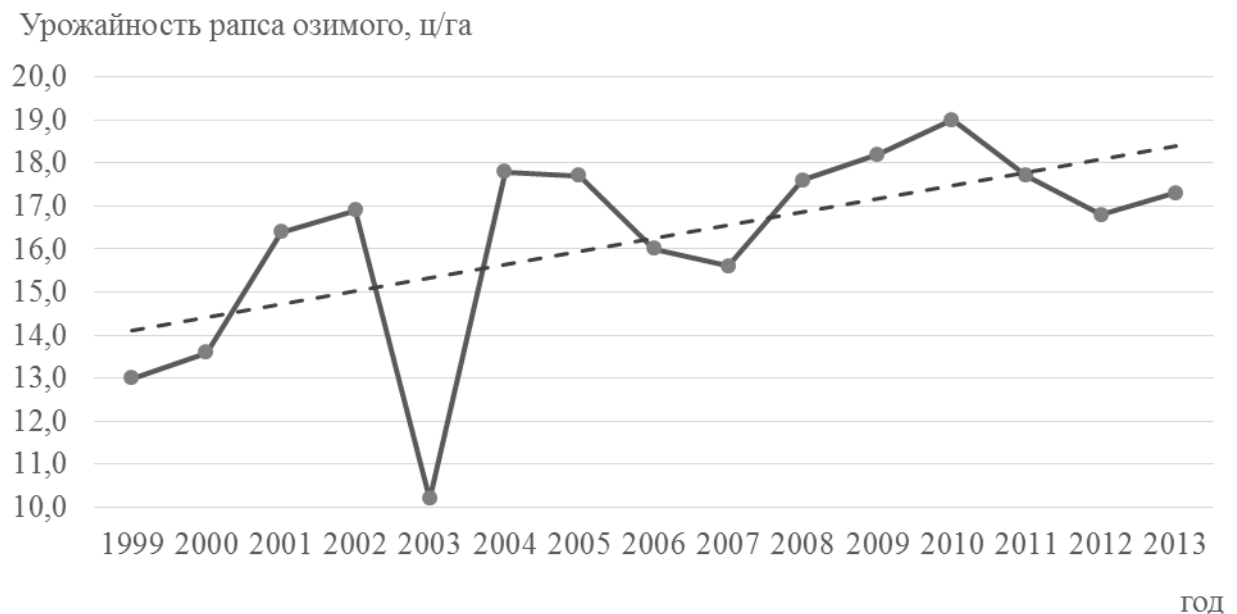


Рис. 2 – Динамика показателя урожайности рапса озимого за период с 1999 по 2013 гг.

Определим параметры уравнения линейного тренда, т. е. уравнения:

$$y_t = a + bt .$$

Используем метод условного отсчета времени, т. е.  $\sum t = 0$ .

Произведем необходимые расчеты для аналитического выравнивания ряда – табл. 6.

$$a = \frac{\sum y}{n} = \frac{243,8}{15} = 0,306 ; b = \frac{\sum y \cdot t}{t^2} = \frac{85,7}{280} = 16,253$$

Уравнение тренда:  $y_t = 16,253 + 0,306 \cdot t$ .



Таблица 6 – Расчёты для построения линейного тренда

Год	$y$	$t$	$yt$	$t^2$	$y_t$	$(y_t - \hat{y}_t)^2$
1999	13,0	-7	-91,0	49	14,1	1,234
2000	13,6	-6	-81,6	36	14,4	0,667
2001	16,4	-5	-82,0	25	14,7	2,812
2002	16,9	-4	-67,6	16	15,0	3,500
2003	10,2	-3	-30,6	9	15,3	26,369
2004	17,8	-2	-35,6	4	15,6	4,660
2005	17,7	-1	-17,7	1	15,9	3,072
2006	16,0	0	0	0	16,3	0,064
2007	15,6	1	15,6	1	16,6	0,920
2008	17,6	2	35,2	4	16,9	0,540
2009	18,2	3	54,6	9	17,2	1,058
2010	19,0	4	76,0	16	17,5	2,318
2011	17,7	5	88,5	25	17,8	0,007
2012	16,8	6	100,8	36	18,1	1,663
2013	17,3	7	121,1	49	18,4	1,201
Сумма	243,8	0	85,7	280		50,087

Согласно уравнению тренда, ежегодное увеличение урожайности рапса озимого составляет – 0,306 ц/га относительно среднего уровня ряда, равного 16,253 ц/га.

4. На графике исходного динамического ряда построим выравненные данные по скользящей средней и по уравнению прямой – рис. 3.

5. Оценим устойчивость тенденции. Для относительной оценки степени случайных колебаний показателя используют коэффициент вариации:

$$V = \frac{s_e}{\bar{y}} \cdot 100,$$

где  $\bar{y}$  – средний уровень динамического ряда;  $s_e$  – остаточная дисперсия:

$$s_e^2 = \frac{1}{n - m} \sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2,$$

где  $n$  – количество наблюдений;  $m$  – количество параметров модели.

Расчеты представлены в табл. 6.

$$s_e^2 = \frac{1}{15-2} \cdot 50,087 = 3,853; \quad \bar{y} = \frac{\sum_{t=1}^n y_t}{n} = \frac{243,8}{15} = 16,253;$$

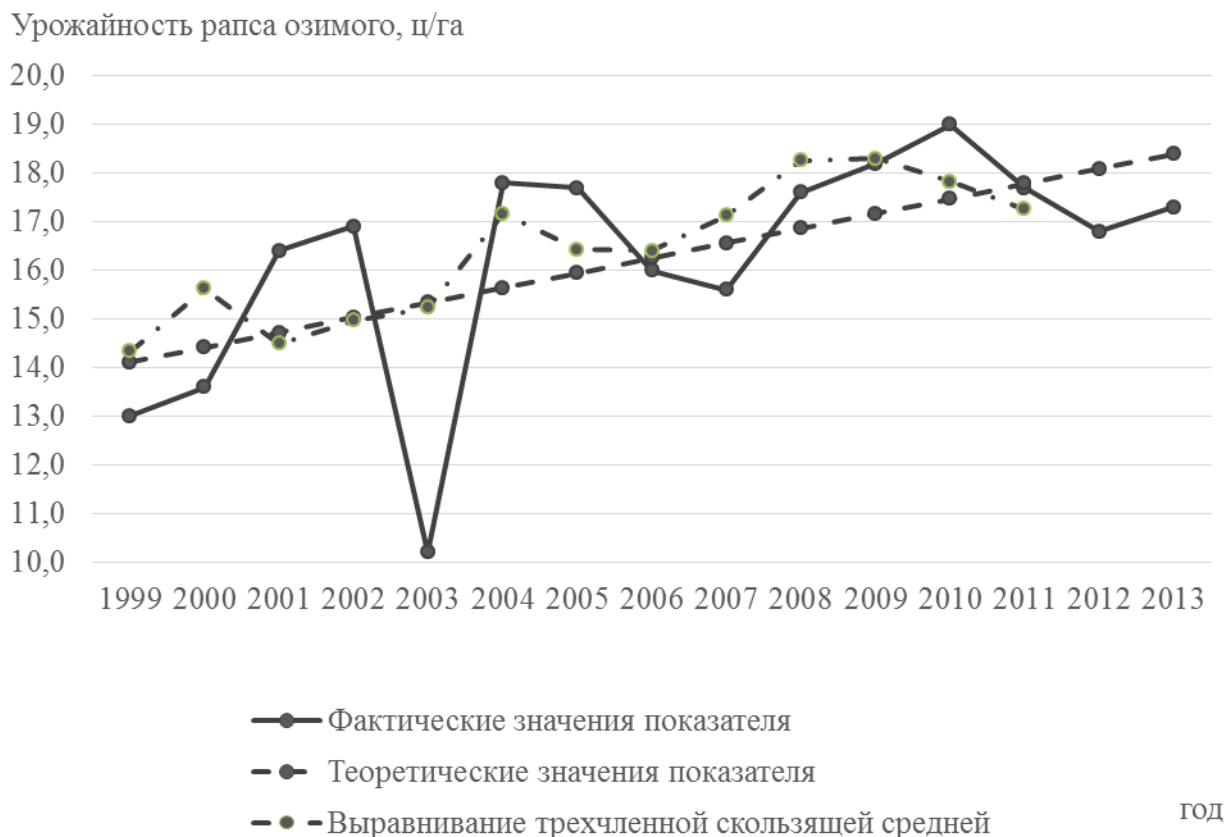


Рис. 3 – Динамика показателя урожайности рапса озимого за период с 1999 по 2013 гг.

$$V = \frac{3,853}{16,253} \cdot 100 = 23,705\%$$

Разницу  $100 - V$  используют для оценки устойчивости динамики:

$$100 - V = 100 - 23,705 = 76,295\%$$

В рассматриваемом примере эта разница приближается к 100 %, что свидетельствует об устойчивом характере тенденции урожайности рапса озимого.

б. Сделаем прогноз значения показателя на 2014 год.

$$\text{Уравнение тренда: } y_t = 16,253 + 0,306 \cdot t$$

Для 2014 г.  $t = 8$ , тогда  $y_{2014} = 16,253 + 0,306 \cdot 8 = 18,7$  ц/га.

Таким образом, при условии, что комплекс причин, формирующих тенденцию исследуемого показателя, в ближайшее время не изменится в 2014 г. урожайность рапса озимого следует ожидать на уровне 18,7ц/га.