Тема: Числовые и функциональные ряды

ЗАДАНИЕ. *Разложить в ряд по степеням x (с указанием области сходимости ряда)* $y = e^x \cos x$.

РЕШЕНИЕ:
По формуле Тэйлора

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Вычисляем:

$$y = e^x \cos x, \quad y(0) = e^x \cos x = 1$$

$$y' = \left(e^x \cos x\right)' = e^x\left(\cos x - \sin x\right), \quad y'(0) = 1$$

$$y'' = \left(e^x\left(\cos x - \sin x\right)\right)' = e^x\left(\cos x - \sin x - \sin x - \cos x\right) = -2e^x \sin x, \quad y''(0) = 0$$

$$y''' = \left(-2e^x \sin x\right)' = -2e^x\left(\sin x + \cos x\right), \quad y'''(0) = -2$$

$$y^{(4)} = \left(-2e^x\left(\sin x + \cos x\right)\right)' = -2e^x\left(\sin x + \cos x + \cos x - \sin x\right) = -4e^x \cos x, \quad y^{(4)}(0) = -4$$

Получаем:

$$y(x) = 1 + x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-2}{3!}x^3 + \frac{-4}{4!}x^4 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots =$$

$$= 1 + x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Здесь

$$y^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^k 4^k, \ n = 4k \\ (-1)^k 4^k, \ n = 4k+1 \\ 0, \ n = 4k+2 \\ (-1)^{k+1} \cdot 2 \cdot 4^k, \ n = 4k+3 \end{cases}$$

То есть общий член ряда можно оценить как $|a_k| \le \frac{2 \cdot 4^k}{(4k)!}$. Найдем радиус сходимости:

Вычисляем предел:

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 4^n \cdot (4n+4)!}{(4n)! \cdot 2 \cdot 4^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(4n+4)!}{(4n)! \cdot 4} = \lim_{n\to\infty}\frac{(4n)!(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)}{(4n)! \cdot 4} = \infty$$

То есть область сходимости полученного ряда – вся числовая прямая.