Решенная задача на тему: отношение эквивалентности

ЗАДАНИЕ.

Дано множество $A = \{1,2,3,4,5\}$ и бинарное отношение $R \subset A \times A$:

$$R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_0 & 1 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_1 & a_4 & 1 & a_7 & a_8 \\ a_2 & a_5 & a_7 & 1 & a_9 \\ a_3 & a_6 & a_8 & a_9 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Проверить, является ли R отношением эквивалентности. Добавить минимальное возможное число пар, чтобы R стало отношением эквивалентности. Найти разбиение P.

РЕШЕНИЕ.

Выпишем матрицу отношения по индивидуальному коду $51366_{10} = 1100100010100110$:

$$R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Проверим, является ли R отношением эквивалентности. Отношение будет эквивалентностью, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Отношение R рефлексивно, так как на главной диагонали матрицы стоят единицы.

Отношение R симметрично, так как матрица отношения симметрична относительно главной диагонали.

Проверим транзитивность. Для этого выпишем отношение в явном виде:

$$R=\{(1,1),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(5,5)\}$$

Отношение не транзитивно, так как, например,

$(1,4)\in R,\ (4,2)\in R$, но $(1,2)\notin R$.

Дополним его до транзитивного. Вводим пару $(1,2)$.

$$\widetilde{R}=\left\{\begin{matrix}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,4),\\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(5,5)\end{matrix}\right\}$$

Ищем еще пары, на которых транзитивность не выполняется, добавляем нужные пары:

$(2,4),(4,1)\Rightarrow(2,1)$,

$(2,4),(4,3)\Rightarrow(2,3)$,

$(3,1),\ (1,2) \Rightarrow (3,2)$.

$$\widetilde{R} = \left\{ \begin{matrix} (1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (3,1),\ (3,2), \\ (3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(5,5) \end{matrix} \right\}.$$

Найдем разбиение P, которое порождается данным отношением эквивалентности:

$$P = \left\{ \begin{matrix} (1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (3,1),\ (3,2), \\ (3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4) \end{matrix} \right\} \cup \{(5,5)\}$$