Бинарные отношения: задача с решением

ЗАДАНИЕ.

Дано множество $A = \{>, <, \geq, \leq\}$. *Записать декартовое произведение* $A \times A$. *Задать 2 бинарных отношения* R_1 *и* R_2, *мощность которых равна 3 и 4 соответственно. Найдите соответствующие замыкания обоих отношений. Изобразите ориентированные графы и запишите матрицы для отношений* R_1 *и* R_2 *и соответствующих замыканий. Вычислите* R_1^{-1}, R_2^{-1}, $R_2 \circ R_1$. *Изобразите соответствующие ориентированные графы и запишите соответствующие матрицы.*

РЕШЕНИЕ.

Запишем декартовое произведение $A \times A$:

$$A\times A=\left\{\begin{matrix}(>,>),(>,<),(>,\geq),(>,\leq),(<,>),(<,<),(<,\geq),(<,\leq),\\(\geq,>),(\geq,<),(\geq,\geq),(\geq,\leq),(\leq,>),(\leq,<),(\leq,\geq),(\leq,\leq)\end{matrix}\right\}$$

Мощность этого множества равна $|A\times A| = 4\cdot 4 = 16$.

Зададим 2 бинарных отношения R_1 и R_2, мощность которых равна 3 и 4 соответственно.

$R_1=\{(>,\geq),(>,\leq),(<,>)\}$, $R_2=\{(<,\geq),(\geq,\leq),(<,>),(<,\leq)\}$.

Найдем соответствующие замыкания обоих отношений.

Замыкание $R^+ = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} R^k$.

Вычисляем:

$R_1^2 = R_1 \circ R_1 = \{(>,\geq),(>,\leq),(<,>)\} \circ \{(>,\geq),(>,\leq),(<,>)\} = \{(<,\geq),(<,\leq)\}$,

$R_1^3 = R_1 \circ R_1^2 = \{(>,\geq),(>,\leq),(<,>)\} \circ \{(<,\geq),(<,\leq)\} = \{\varnothing\}$.

Значит, $R_1^+ = \{(>,\geq),(>,\leq),(<,>),(<,\geq),(<,\leq)\}$.

Вычисляем:

$R_2^{\,2} = R_2 \circ R_2 = \{(<,\geq),(\geq,\leq),(<,>),(<,\leq)\} \circ \{(<,\geq),(\geq,\leq),(<,>),(<,\leq)\} = \{(<,\geq)\}$,

$R_2^{\,3} = R_2 \circ R_2^{\,2} = \{(<,\geq),(\geq,\leq),(<,>),(<,\leq)\} \circ \{(<,\geq)\} = \{\varnothing\}$.

Значит, $R_2^{+} = \{(<,\geq),(\geq,\leq),(<,>),(<,\leq)\}$

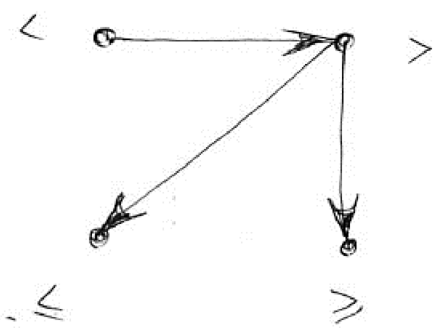
Изобразим ориентированные графы и запишем матрицы для отношений R_1 и R_2 и соответствующих замыканий.

При построении матриц упорядочиваем элементы в следующем порядке ($<,>,\leq,\geq$).

Для отношения $R_1 = \{(>,\geq),(>,\leq),(<,>)\}$ матрица имеет вид:

$$P(R_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

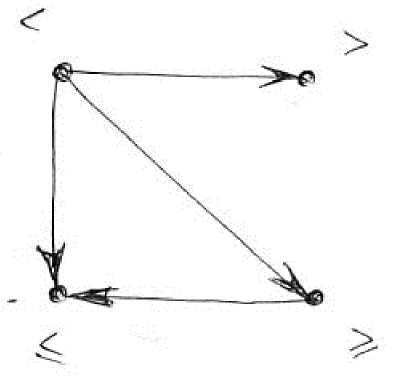
Граф имеет вид:



Для отношения $R_2 = \{(<,\geq),(\geq,\leq),(<,>),(<,\leq)\}$ матрица имеет вид:

$$P(R_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

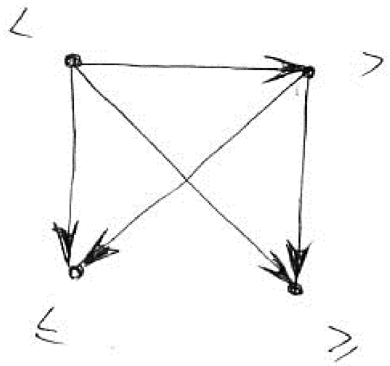
Граф имеет вид:



Для замыкания отношения $R_1^+ = \{(>,\geq),(>,\leq),(<,>),(<,\geq),(<,\leq)\}$ матрица имеет вид:

$$P(R_1^+) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

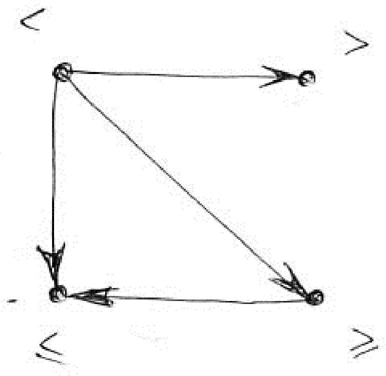
Граф имеет вид:



Для замыкания отношения $R_2^+ = \{(<,\geq),(\geq,\leq),(<,>),(<,\leq)\}$ матрица имеет вид:

$$P(R_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Граф имеет вид:



Вычислим R_1^{-1}, R_2^{-1}, $R_2 \circ R_1$.

$R_1^{-1} = \{(\geq, >), (\leq, >), (>, <)\}$,

$R_2^{-1} = \{(\geq, <), (\leq, \geq), (>, <), (\leq, <)\}$,

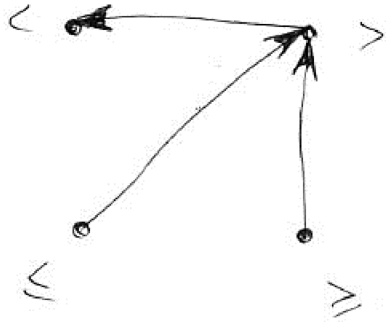
$R_2 \circ R_1 = \{(<, \geq), (\geq, \leq), (<, >), (<, \leq)\} \circ \{(>, \geq), (>, \leq), (<, >)\} = \{(<, \geq), (<, \leq)\}$

Изобразим соответствующие ориентированные графы и запишем соответствующие матрицы.

Для $R_1^{-1} = \{(\geq, >), (\leq, >), (>, <)\}$ матрица имеет вид:

$$P(R_1^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

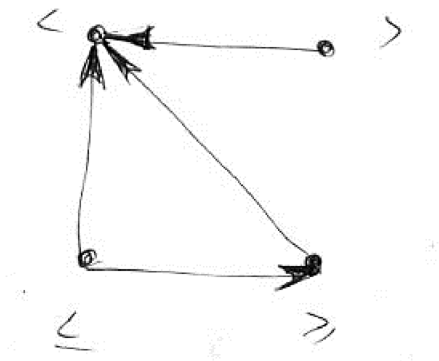
Граф имеет вид:



Для $R_2^{-1} = \{(\geq,<),(\leq,\geq),(>,<),(\leq,<)\}$ матрица имеет вид:

$$P(R_2^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Граф имеет вид:



Для $R_2 \circ R_1 = \{(<,\geq),(<,\leq)\}$ матрица имеет вид:

$$P(R_2 \circ R_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Граф имеет вид: