Линейная динамическая стационарная система

Пример решения задачи

Задача. На вход линейной стационарной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подаётся стационарная случайная функция X(t) с математическим ожиданием m_x и корреляционной функцией $k_x(\tau)$. Найти
1) математическое ожидание;
2) дисперсию случайной функции Y(t) на выходе системы в установившемся режиме.

$Y'(t)+3Y(t)=3X'(t)+X(t)$, $m_x=12$, $K_x(\tau)=e^{-2|\tau|}$.

Решение.

Математическое ожидание $Y(t)$ находится по формуле $m_y=m_x\dfrac{1}{3}=4$.

Чтобы найти дисперсию $Y(t)$, нужно сначала найти корреляционную функцию по формуле: $K_y(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}s_y(w)e^{iw\tau}dw$ или сразу использовать формулу $D_y=\int\limits_{-\infty}^{\infty}s_y(w)dw$.

Спектральная плотность $s_y(w)$ находится из соотношения:
$s_y(w)=s_x(w)\cdot|\Phi(iw)|^2$, где частотная характеристика находится из уравнения системы:
$\Phi(iw)=\dfrac{3(iw)+1}{1(iw)+3}=\dfrac{3iw+1}{3+iw}$.

Получаем, что $|\Phi(iw)|^2=\left|\dfrac{3iw+1}{3+iw}\right|^2=\dfrac{1+9w^2}{9+w^2}$.

Найдем спектральную плотность $X(t)$ по данной корреляционной функции $K_x(\tau)=e^{-2|\tau|}$.
Используем общую формулу:
$K_x(\tau)=D_xe^{-\alpha|\tau|}\quad\Leftrightarrow s_x(w)=\dfrac{D_x\alpha}{\pi(\alpha^2+w^2)}$.

Получаем, что $D_x=1,\ \alpha=2,\Rightarrow s_x(w)=\dfrac{2}{\pi(4+w^2)}$.

Спектральная плотность $Y(t)$ имеет вид:

$$s_y(w)=s_x(w)\cdot|\Phi(iw)|^2=\frac{2}{\pi(4+w^2)}\frac{1+9w^2}{9+w^2}=\frac{2(1+9w^2)}{\pi(4+w^2)(9+w^2)}.$$

Теперь можно вычислить искомую дисперсию:

$$D_y=\int\limits_{-\infty}^{\infty}s_y(w)dw=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{2(1+9w^2)}{\pi(4+w^2)(9+w^2)}dw=\frac{11}{3}.$$