

## Спектральная плотность стационарного случайного процесса

### Пример решения задачи

**Задача.** Найти одностороннюю  $S(\omega)$  и двустороннюю  $S^*(\omega)$  спектральную плотность стационарного случайного процесса с корреляционной функцией  $K(\tau) = e^{-6\tau} \cos 2\tau$ .

**Решение.**

Спектральной плотностью стационарного случайного процесса называют функцию  $S(\omega)$ , которая связана с корреляционной функцией  $K(\tau)$  взаимно-обратными косинус преобразованиями Фурье:

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K(\tau) \cos \omega \tau d\tau.$$

Двусторонняя спектральная плотность  $S^*(\omega) = 2S(\omega)$ .

Вычислим интеграл:

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-6\tau} \cos 2\tau \cdot \cos \omega \tau d\tau =$$

Используем табличный интеграл для сокращения расчетов:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos mx \cos nx dx = \frac{a(a^2 + m^2 + n^2)}{(a^2 + (m-n)^2)(a^2 + (m+n)^2)},$$

Здесь подставим  $a = -6$ ,  $m = 2$ ,  $n = \omega$ . Получим:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-6\tau} \cos 2\tau \cdot \cos \omega \tau d\tau = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{-6(36 + 4 + \omega^2)}{(36 + (2 - \omega)^2)(36 + (2 + \omega)^2)} = \\ &= -\frac{6}{\pi} \cdot \frac{(40 + \omega^2)}{(36 + (2 - \omega)^2)(36 + (2 + \omega)^2)}. \end{aligned}$$

Тогда

$$S^*(\omega) = 2S(\omega) = -\frac{12}{\pi} \cdot \frac{(40 + \omega^2)}{(36 + (2 - \omega)^2)(36 + (2 + \omega)^2)}.$$

$$\text{Ответ: } S(\omega) = -\frac{6}{\pi} \cdot \frac{(40 + \omega^2)}{(36 + (2 - \omega)^2)(36 + (2 + \omega)^2)};$$

$$S^*(\omega) = -\frac{12}{\pi} \cdot \frac{(40 + \omega^2)}{(36 + (2 - \omega)^2)(36 + (2 + \omega)^2)}.$$