

## Прикладная математика

### Пример решения задачи о растворении соли

**Задача.** Пористое нерастворимое вещество, содержащее в своих порах 2 кг соли, погружается в 30 л воды. Через 5 мин растворяется 1 кг соли. Через какое время растворится 99% первоначального количества соли.

**Решение.** Пусть  $y(t)$  - концентрация (кг/л) соли в растворе,  $t$  - время после погружения (в минутах).

Скорость повышения концентрации (растворения) соли в растворе – это производная функции  $y'(t)$ . Она пропорциональна разности концентрации насыщенного раствора и концентрации раствора в данный момент  $(a - y(t))$ .

Получаем:

$$y'(t) = k(a - y(t)), \quad (*)$$

где  $k$  - неизвестный коэффициент пропорциональности.

Также известно, что  $y(0) = 0$ ,  $y(5) = 1/30$ .

Решаем дифференциальное уравнение (\*):

$$y'(t) = k(a - y(t)),$$

$$\frac{dy}{dt} = k(a - y),$$

$$\frac{dy}{y - a} = -k dt,$$

$$\int \frac{dy}{y - a} = -\int k dt,$$

$$\ln |y - a| = -kt + \ln C,$$

$$y = Ce^{-kt} + a.$$

Из условий  $y(0) = 0$ ,  $y(5) = 1/30$  находим  $k$  и  $C$ :

$$\begin{cases} y(0) = C + a = 0, \\ y(5) = Ce^{-5k} + a = 1/30. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = -a, \\ a(1 - e^{-5k}) = 1/30. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = -a, \\ e^{-5k} = 1 - \frac{1}{30a}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = -a, \\ k = -\frac{1}{5} \ln\left(1 - \frac{1}{30a}\right); \end{cases}$$

Решение принимает вид:

$$y(t) = -ae^{\frac{1}{5} \ln\left(1 - \frac{1}{30a}\right)t} + a.$$

Найдем, через какое время растворится 99% первоначального количества соли, то есть концентрация достигнет  $\frac{2 \cdot 0,99}{30}$  кг/л. Предположим

дополнительно, что концентрация насыщенного раствора  $a = 1/3$ , тогда

$$y(t) = -\frac{1}{3} e^{\frac{1}{5} \ln\left(1 - \frac{1}{10}\right)t} + \frac{1}{3} = \frac{1,98}{30}, \Rightarrow t \approx 10,47 \text{ минут.}$$

**Ответ.** Примерно через 10,5 минут.