Тема: вычисление длины дуги кривой с помощью интеграла (в параметрических координатах)

ЗАДАНИЕ. *Найти длину дуги кривой.*

$$\begin{cases} x = 3(1-\cos t)\cos t, \\ y = 3(1-\cos t)\sin t, \end{cases}$$
$$0 \le t \le \pi.$$

РЕШЕНИЕ:

Найдем производные:

$$x' = \left(3(1-\cos t)\cos t\right)' = 3\sin t\cos t + 3(1-\cos t)(-\sin t) = 3(\sin t\cos t - \sin t + \sin t\cos t) =$$
$$= 6\sin t\cos t - 3\sin t.$$
$$y' = \left(3(1-\cos t)\sin t\right)' = 3\sin t\sin t + 3(1-\cos t)(\cos t) = 3\left(\sin^2 t + \cos t - \cos^2 t\right)$$

Тогда

$$x'^2 + y'^2 = (6\sin t\cos t - 3\sin t)^2 + \left(3\left(\sin^2 t + \cos t - \cos^2 t\right)\right)^2 =$$
$$= 9\sin^2 t(2\cos t - 1)^2 + 9\left(\sin^2 t + \cos t - \cos^2 t\right)^2 =$$
$$= 9\sin^2 t\left(4\cos^2 t + 4\cos t + 1\right) + 9\left(\sin^4 t + 2\cos t\sin^2 t - 2\cos^2 t\sin^2 t + \cos^2 t - 2\cos^3 t + \cos^4 t\right) =$$
$$= 9\left(4\sin^2 t\cos^2 t + 4\sin^2 t\cos t + \sin^2 t + \sin^4 t + 2\cos t\sin^2 t - 2\cos^2 t\sin^2 t + \cos^2 t - 2\cos^3 t + \cos^4 t\right) =$$
$$= 9\left(2\sin^2 t\cos^2 t + 6\sin^2 t\cos t + \sin^2 t + \sin^4 t + \cos^2 t - 2\cos^3 t + \cos^4 t\right) = 18 - 18\cos t.$$

Тогда длина дуги кривой равна:

$$l = \int_0^\pi \sqrt{18 - 18\cos t}\,dt = 3\sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{1-\cos t}\,dt = 3\sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{2}\sin(t/2)\,dt =$$
$$= 12\int_0^\pi \sin(t/2)\,d(t/2) = -12\cos(t/2)\Big|_0^\pi = 12.$$

ОТВЕТ: 12.