Тема: вычисление длины дуги кривой с помощью интеграла

ЗАДАНИЕ. *Найти длину дуги кривой* l.

$y=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2}, 1\le x\le 2$.

РЕШЕНИЕ:

Вычислим:

$$y'=\left(\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2}\right)'=\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$$

$$1+(y')^2=1+\frac{1}{4}\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^2=\frac{4x^2+x^4-2x^2+1}{4x^2}=\frac{x^4+2x^2+1}{4x^2}=\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)^2.$$

Тогда длина дуги кривой равна:

$$l=\int_1^2\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_1^2\frac{x^2+1}{2x}\,dx=\int_1^2\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)dx=\left.\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln x\right)\right|_1^2=$$

$$=\left(\frac{1}{4}2^2+\frac{1}{2}\ln 2\right)-\left(\frac{1}{4}1^2+\frac{1}{2}\ln 1\right)=1+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}-0=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

ОТВЕТ: $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$.