Тема: вычисление длины дуги кривой с помощью интеграла (в полярных координатах)

Задание. *Найти длину дуги кривой.*
$r=2\varphi,\ 0\le\varphi\le 1$.

Решение:
Вычисляем производную: $\rho'=(2\varphi)'=2$.
Вычисляем
$dl=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\varphi=\sqrt{4\varphi^2+4}d\varphi=2\sqrt{\varphi^2+1}d\varphi$
Тогда длина дуги кривой равна:
$$l=\int_0^1 dl=\int_0^1 2\sqrt{\varphi^2+1}d\varphi=2\int_0^1\sqrt{\varphi^2+1}d\varphi=$$
Вычислим отдельно интеграл:
$$I=\int\sqrt{\varphi^2+1}d\varphi=\left|\begin{matrix} u=\sqrt{\varphi^2+1} & du=\dfrac{\varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}} \\ dv=d\varphi & v=\varphi\end{matrix}\right|=\varphi\sqrt{\varphi^2+1}-\int\frac{\varphi^2 d\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}}=$$
$$=\varphi\sqrt{\varphi^2+1}-\int\frac{\varphi^2+1-1}{\sqrt{\varphi^2+1}}d\varphi=\varphi\sqrt{\varphi^2+1}-\int\sqrt{\varphi^2+1}d\varphi+\int\frac{1}{\sqrt{\varphi^2+1}}d\varphi=$$
$$=\varphi\sqrt{\varphi^2+1}-I+\ln\left|\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right|+C,$$
$$2I=\varphi\sqrt{\varphi^2+1}+\ln\left|\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right|+C,$$
$$I=\frac{1}{2}\varphi\sqrt{\varphi^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right|+C.$$

Возвращаемся к интегралу:
$$=\left(\varphi\sqrt{\varphi^2+1}+\ln\left|\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right|\right)\Bigg|_0^1=\left(1\sqrt{1^2+1}+\ln\left|1+\sqrt{1^2+1}\right|\right)-\left(0+\ln\left|0+\sqrt{0^2+1}\right|\right)=$$
$$=\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Ответ: $\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.